



**Titre:** Commande des systèmes robotiques avec contraintes holonomes  
Title:

**Auteur:** Faïçal Mnif  
Author:

**Date:** 1996

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mnif, F. (1996). Commande des systèmes robotiques avec contraintes holonomes  
Citation: [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/8931/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8931/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

COMMANDE DES SYSTÈMES ROBOTIQUES  
AVEC CONTRAINTES HOLONOMES

Faiçal MNIF

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)  
SEPTEMBRE 1996



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26428-9

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

COMMANDE DES SYSTÈMES ROBOTIQUES  
AVEC CONTRAINTES HOLONOMES

présentée par: MNIF Faïçal

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor (Ph.D.)

a été dûement acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. O'SHEA Jules, D. Ing., président

M. BOUKAS El-Kébir, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. SAAD Maarouf, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. HEMAMI Ahmad, Ph.D., membre

M. HACHED Mehrez, Ph.D., membre

*À mes parents*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes codirecteurs de recherche, le professeur El-Kébir Boukas et le professeur Maarouf Saad, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée ainsi que pour leurs encouragements persistants tout au long de mes études au doctorat.

J'aimerais aussi remercier le Professeur Jules O'Shea, le Docteur Ahmad Hemami et le Docteur Mehrez Hached, d'avoir accepté de siéger sur le jury de cette thèse.

Je remercie aussi le professeur Richard Hurteau, le professeur Charles Laberge, la professeure Ouassima Akhrif et le professeur René Mayer pour leurs commentaires enrichissants lors de mon examen général de synthèse oral.

Je remercie également tous mes collègues du laboratoire de recherche en robotique et automatique et ceux du GREPCI pour les discussions enrichissantes et l'ambiance unique qu'ils m'ont partagée.

Je remercie Mme Najiba Haouari pour la révision de la version finale de cette thèse.

Je veux, de plus, remercier tous mes amis, dont le nombre ne me permet malheureusement de les citer, pour leur soutien et leur amitié.

Je ne peux trouver tous les mots pour exprimer ma gratitude envers ma famille, pour son soutien tout au long de mes études en Tunisie et au Canada.

## RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous étudions la modélisation et la commande de position et de force des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Lorsqu'un système mécanique, en l'occurrence, un robot manipulateur exécute une tâche sur une surface de contraintes, des forces de contraintes, produites par l'interaction du système avec la surface, prennent naissance. Ces systèmes sont modélisés mathématiquement par un ensemble d'équations algébro-différentielles. La singularité du modèle dynamique de tels systèmes rend leur analyse plus complexe que celle des manipulateurs opérants dans un environnement libre. Une transformation des coordonnées généralisées naturelles du modèle à de nouveaux coordonnées est, pour cet effet, utilisée afin de simplifier la présentation de ces systèmes. D'un autre côté, la connaissance exacte de la dynamique du robot manipulateur n'est pas toujours possible. Dans ce cas, la convergence des erreurs du système n'est pas assurée avec les aspects de la commande classique. Des techniques de commande robustes sont employées pour pallier à ce type de problème. En particulier, des techniques de commande à structure variable et à structure variable adaptative sont étudiées. Pour remédier au problème de la discontinuité de la commande à structure variable, nous avons élaboré des techniques de commande robuste par un retour d'état continu. Ces techniques garantissent la stabilité asymptotique du système incertain. Des preuves théoriques des techniques utilisées ainsi que des simulations numériques effectuées sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté seront données à l'appui.

## ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of the modelisation and the force/motion control of mechanical systems under holonomic constraints. Many mechanical systems operate in constrained environments and interact with environmental constraints to perform certain tasks. These constraints, which might not commonly be considered as part of the mechanical system, are viewed as an important part of the system. Constraint forces, which are produced by the interaction with the constraint, are unique aspects of these systems. These constrained mechanical systems can be mathematically described by a set of algebro-differential equations. The singularity of such systems, makes their analysis and control more complicated than that of unconstrained systems. A nonlinear coordinates transformation has been used to simplify the presentation of these systems. On the other hand, the exact knowledge of the robot parameters, is not always possible. In this case, the convergence of the system errors can't be guaranteed by the use of classical control laws. Robust control laws has been employed for the force and position control of the system. In particular, variable structure control and adaptive variable structure control have been used. To avoid the discontinuities of these control laws, we developed a variable structure control, with continuous state feedback, guaranteeing asymptotic stability of the uncertain system. Theoretical proofs and numeric simulations made for a two-degrees of freedom robot are presented.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> .....	vi
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	v
<b>RÉSUMÉ</b> .....	vi
<b>ABSTRACT</b> .....	vii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	viii
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	xiii
<b>NOTATIONS ET VARIABLES PRINCIPALES</b> .....	xvi
 <b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION</b> .....	 1
1.1 Revue de littérature.....	2
1.2 Motivation de la recherche.....	5
1.3 Méthodologie .....	7
1.4 Contributions originales .....	9
1.5 Organisation de la Thèse .....	10
 <b>CHAPITRE 2: SYSTÈMES MÉCANIQUES AVEC CONTRAINTES</b>	
<b>HOLONOMES</b> .....	12
2.1 Introduction.....	12
2.2 Hypothèses .....	13
2.3 Formulation de la dynamique du système.....	13
2.3.1 Variété des contraintes.....	14
2.3.2 Équations de Lagrange.....	18

2.3.3	Dynamique du manipulateur en chaîne fermée .....	22
2.4	Caractéristiques du Modèle .....	26
2.4.1	Multiplicateurs de Lagrange .....	26
2.4.2	Singularités du modèle .....	28
2.5	Solution et solvabilité du modèle .....	29
2.6	Concepts relatifs à la stabilité du modèle .....	32
2.7	Dynamique réduite des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes .....	34
2.7.1	Transformation de coordonnées .....	35
2.7.2	Forme réduite du modèle dynamique des systèmes avec contraintes holonomes .....	40
2.8	Stabilité locale du modèle réduit .....	44
2.9	Effet des forces de frottement de Coulomb sur la dynamique du système .....	46
2.9.1	Forces de frottement de Coulomb .....	47
2.9.2	Équations de la dynamique réduite .....	48
2.10	Conclusion .....	49
 <b>CHAPITRE 3: COMMANDE PAR LINÉARISATION EXACTE .....</b>		<b>51</b>
3.1	Introduction .....	51
3.2	Concepts théoriques .....	52
3.2.1	Présentation des systèmes .....	52
3.2.2	Dérivées de Lie .....	53
3.2.3	Indice caractéristique .....	54
3.3	Commande linéarisante et découplante par retour de sorties .....	54
3.3.1	Position du problème .....	54
3.3.2	Résultat général .....	55

3.4 Ojectifs de la commande .....	57
3.5 Application de la commande linéarisante et découplante à un robot manipulateur avec contraintes holonomes.....	59
3.5.1 Représentation d'état de la dynamique du manipulateur avec contraintes.....	60
3.5.2 Commande linéarisante et découplante.....	61
3.6 Application à un manipulateur robotique à deux degrés de liberté.....	64
3.6.1 Manipulateur robotique à deux degrés de liberté avec contraintes.....	65
3.6.2 Équation des contraintes .....	66
3.6.3 Modèle dynamique transformé .....	67
3.6.4 Trajectoires désirées .....	67
3.6.5 Résultats de simulation .....	68
3.7 Conclusion.....	75

## **CHAPITRE 4: STABILISATION ROBUSTE DE LA COMMANDE**

<b>LINÉARISANTE ET DÉCOUPLANTE .....</b>	<b>76</b>
4.1 Introduction.....	76
4.2 Analyse de robustesse de la commande linéarisante .....	77
4.2.1 Modèle d'état du système incertain sous la commande linéarisante et découplante .....	77
4.2.2 Convergence de la force des contraintes.....	81
4.2.3 Modèle incertain de la dynamique réduite.....	82
4.2.4 Caractéristiques du modèle incertain .....	83
4.2.5 Condition de robustesse de la commande linéarisante et découplante.....	84

4.3 Stabilisation robuste du système dynamique incertain .....	86
4.3.1 Position du problème .....	86
4.3.2 Stabilisation robuste par retour d'état continu.....	89
4.4 Application .....	96
4.5 Conclusion.....	100

## **CHAPITRE 5: COMMANDE À STRUCTURE VARIABLE**

<b>ADAPTATIVE</b> .....	101
5.1 Introduction.....	101
5.2. Systèmes à structure variable .....	102
5.2.1 Mode de glissement.....	103
5.3 Commande à structure variable d'un robot manipulateur avec contraintes	
holonomes .....	105
5.3.1 Conception du contrôleur .....	106
5.3.2 Stabilisation robuste du système.....	110
5.3.3 Élimination des commutations.....	113
5.4 Version adaptative de la commande à structure variable d'un manipulateur	
avec contraintes holonomes .....	114
5.5 Application .....	116
5.5 Conclusion.....	123

## **CHAPITRE 6: COMMANDE ROBUSTE PAR RETOUR D'ÉTAT**

<b>CONTINU</b> .....	125
6.1 Introduction.....	125
6.2 Commande robuste par retour d'état continu .....	125

6.2.1 Commande par retour d'état continu .....	126
6.2.2 Schéma modifié de la commande .....	130
6.2.3 Extension de la loi de commande .....	132
6.3 Version adaptative de la commande .....	133
6.3.1 Lois de commande et d'adaptation .....	133
6.3.2 Extension des lois de commande et d'adaptation.....	135
6.4 Application .....	136
6.5 Conclusion.....	142
 <b>CHAPITRE 7: CONCLUSION</b> .....	 144
 <b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	 148

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Force de frottement de coulomb.....	47
Figure 3.1 Schéma de la commande linéarisante et découplante.....	55
Figure 3.2 Manipulateur à deux degrés de liberté.....	65
Figure 3.3 Trajectoires de poursuite de l'articulation 2 avec la loi de commande (3.37).....	69
Figure 3.4 Erreur de poursuite du mouvement de l'articulation 2 avec la loi de commande (3.37).....	69
Figure 3.5 Forces appliquées sur la surface des contraintes avec la loi de commande (3.37).....	70
Figure 3.6 Erreur relative à la force des contraintes avec la loi de commande (3.37).....	70
Figure 3.7 Effort des couples appliqués aux articulations 1 et 2 avec la loi de commande (3.37).....	71
Figure 3.8 Trajectoires de poursuite de l'articulation 2 avec la loi de commande (3.37) .....	71
Figure 3.9 Erreur de poursuite de mouvement de l'articulation 2 avec la loi de commande (3.37) .....	72
Figure 3.10 Forces appliquées sur la surface des contraintes avec la loi de commande (3.37).....	72
Figure 3.11 Erreur relative à la force des contraintes avec la loi de commande (3.37).....	73
Figure 3.12 Effort des couples appliqués aux articulations 1 et 2 avec la loi de commande (3.37).....	73

Figure 3.13 Erreur de poursuite de mouvement de l'articulation 2 avec la loi de commande (3.37) du système perturbé .....	74
Figure 3.14 Erreur relative à la force des contraintes avec la loi de commande (3.37) du système perturbé.....	74
Figure 4.1 Trajectoire de poursuite du mouvement avec la loi de commande (4.84).....	97
Figure 4.2 Erreur sur la trajectoire de poursuite avec la loi de commande (4.84) .....	97
Figure 4.3 Force appliquée sur la surface des contraintes avec la loi de commande (4.84).....	98
Figure 4.4 Erreur de la force des contraintes avec la loi de commande (4.84) .....	98
Figure 4.5 Couples appliqués aux articulations 1 et 2 avec la loi de commande (4.84).....	99
Figure 4.6 Erreur sur la trajectoire de poursuite avec la loi de commande (4.70) .....	99
Figure 5.1. Les trajectoires du système (5.4) sur la surface de glissement. ....	105
Figure 5.2 Trajectoire de poursuite du mouvement avec les lois de commande (5.37) et (5.27).....	117
Figure 5.3 Erreur sur la trajectoire de poursuite avec les lois de commande (5.37) et (5.27).....	118
Figure 5.4 Force appliquée sur la surface des contraintes avec les lois de commande (5.37) et (5.27).....	119
Figure 5.5 Erreur de la force appliquée sur la surface des contraintes avec les lois de commande (5.37) et (5.27).....	120
Figure 5.6 Couples appliqués aux articulations 1 et 2 avec les lois de commande (5.37) et (5.27).....	121
Figure 5.7 Erreur sur la trajectoire de poursuite avec la loi de commande (5.14) .....	122

Figure 5.8 Trajectoire de poursuite avec l'approche de Su et al.....	123
Figure 5.9 Erreur de force avec l'approche de Su et al.....	123
Figure 6.1 Poursuite de la trajectoire de déplacement avec les lois de commande (6.18) et (6.28).....	137
Figure 6.2 Erreur relative à la trajectoire de déplacement avec les lois de commande (6.18) et (6.28).....	138
Figure 6.3 Force appliquée sur la surface des contraintes avec les lois de commande (6.18) et (6.28).....	139
Figure 6.4 Erreur de la force des contraintes avec les lois de commande (6.18) et (6.28).....	140
Figure 6.5 Couples appliqués aux articulations 1 et 2 avec les lois de commande (6.18) et (6.28).....	141
Figure 6.6 Erreur relative à la trajectoire de poursuite avec la loi de commande (6.8).....	142



## NOTATIONS ET VARIABLES PRINCIPALES

### NOTATIONS

vecteurs et matrices en caractère gras, e.g.  $\mathbf{v}$

scalaire en caractère simple et italique, e.g.  $v$

dérivée temporelle,  $\frac{\partial v}{\partial t} = \dot{v}$

dérivée spatiale,  $\frac{\partial v}{\partial x} = v'$

transposée d'un vecteur ou d'une matrice e.g.  $\mathbf{v}^T$

transposée de l'inverse d'une matrice, e.g.  $\mathbf{M}^{-T}$

dérivée de Lie d'une fonction scalaire  $h$  par rapport à un champ de vecteurs  $\mathbf{f}$ :  $L_{\mathbf{f}}h$

la  $i$ ème valeur propre d'une matrice  $(.)$ :  $\lambda_i(.)$

la variation d'une variable ou d'un vecteur ou d'une matrice par rapport aux conditions nominales est dénotée par  $\Delta$ .

la norme d'un vecteur ou d'une matrice est dénotée par  $\|\cdot\|$

l'erreur relative à une variable ou un vecteur est muni d'un tilda, e.g.  $\tilde{v}$

### VARIABLES

**C** :matrice des termes centrifuges et de Coriolis

**f** :vecteur des forces de contraintes généralisées dans l'espace des articulations

**G** :vecteur des forces de gravitation

**J** :matrice Jacobienne relative aux forces des contraintes

$L$	:Lagrangien
$M$	:matrice des masses généralisées
$p$	:vecteur des coordonnées dans l'espace de la tâche
$P$	:solution de l'équation de Lyapunov du système linéaire
$q$	:vecteur des coordonnées dans l'espace des articulations
$Q$	:matrice de transformation inverse, elle signifie aussi une matrice symétrique définie positive
$q_1$	:vecteur des coordonnées commandées en force
$q_2$	:vecteur des coordonnées commandées en position
$s$	:surface de glissement
$S$	:variété des contraintes
$t$	:variable de temps
$T$	:Jacobien de la matrice de transformation
$u$	:vecteur des couples d'entrée
$V$	:fonction de Lyapunov
$x$	:vecteur des coordonnées généralisées transformées
$X$	:matrice de transformation
$x_2$	:vecteur des variables commandées en position
$\delta$	:vecteur de perturbations externes
$\phi$	:membre de gauche de l'équation des contraintes en termes des coordonnées dans l'espace de la tâche
$\Phi$	:membre de gauche de l'équation des contraintes en termes des coordonnées dans l'espace des articulations
$\lambda$	:vecteur des multiplicateurs de Lagrange

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Plusieurs systèmes mécaniques opèrent dans des environnements contraints et interagissent avec leur environnement de travail pour accomplir certaines tâches. Ce type d'application donne naissance à des systèmes dits systèmes avec contraintes. Ces contraintes sont dites holonomes lorsque le contact est rigide et que les équations des contraintes dépendent uniquement des positions généralisées du système. Les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes représentent une classe de systèmes de grande importance théorique et pratique.

En effet, lorsqu'un système mécanique, en l'occurrence, un robot manipulateur exécute une tâche sur une surface de contraintes, des forces de contraintes, produites par l'interaction du système avec la surface, prennent naissance. Ces systèmes sont modélisés mathématiquement par un ensemble d'équations algébro-différentielles.

L'utilisation de ces équations pour la planification et la commande des manipulateurs avec contraintes holonomes n'est pas très adéquate, à cause de la singularité qui caractérise le modèle dynamique. Une transformation des coordonnées généralisées naturelles du modèle à de nouvelles coordonnées, où les équations des contraintes se trouvent imbriquées dans le modèle, est utilisée pour simplifier la présentation du système.

D'autre part, la connaissance exacte de la dynamique du robot manipulateur n'est pas toujours possible. Ce manque d'information peut être dû à la variation des paramètres du système au cours de l'exécution d'une tâche (e.g. la charge), l'effet des perturbations externes ou encore à une dynamique non modélisée du système. Dans ce cas, la commande classique ne peut pas assurer la convergence du système. Une commande robuste doit être employée pour pallier à ce type de problème.

Dans cette thèse, on étudie la commande position/force des systèmes robotiques avec contraintes holonomes. En particulier, des techniques de commande robustes et adaptatives sont présentées, garantissant la stabilité asymptotique des systèmes considérés dans le cas de système incertain. Ces incertitudes associées essentiellement aux variations des paramètres, aux perturbations externes ainsi qu'aux dynamiques non modélisées. Des preuves théoriques des techniques utilisées ainsi que des simulations numériques effectuées sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté seront données à l'appui.

### 1.1 Revue de la littérature

De toute évidence, le développement de la robotique améliore grandement la productivité et la qualité des produits industriels. Dans beaucoup d'applications, un robot manipulateur est amené à exécuter des tâches qui requièrent un contact permanent avec son environnement de travail. Ce type de tâche va de simples applications de collage, de contournement des bords jusqu'aux applications de grandes envergures industrielles, comme le dégivrage des avions et l'ébavurage, passant par les applications d'assemblage. Dans toutes ces applications, l'effecteur du manipulateur robotique est contraint de se déplacer sur une surface de contraintes dictée par la nature de la tâche confiée au système

robotique. Les forces de contact entre l'effecteur du robot manipulateur et la surface des contraintes sont souvent requises pour l'accomplissement de certaines tâches. Lorsqu'un robot manipulateur et son environnement des contraintes sont intégrées dans ce qu'on appelle communément, une chaîne cinématique fermée, les forces de contact modifient la dynamique du robot manipulateur.

La recherche sur l'analyse et la commande des manipulateurs robotiques avec contraintes holonomes est récente. Le travail de Mc-Clamroch et Wang (1988) a donné un grand élan à la recherche dans ce domaine, en développant une nouvelle formulation de la dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes, et qui était basée sur un aspect particulier de la mécanique classique. Et ce n'est qu'au début des années 90 que l'intensité de cette recherche a suscité l'intérêt des chercheurs en robotique.

L'existence des contraintes environnementales cause plusieurs problèmes qui n'existent pas lorsque le manipulateur opère dans un espace libre. Ainsi, lorsqu'on parle de commande des manipulateurs avec contraintes environnementales, trois classes de contraintes peuvent se présenter.

La première classe regroupe les contraintes environnementales, qui ne sont pas rigides, et présente un degré d'élasticité fini. La surface qui représente ces contraintes subit une déformation suite au contact avec l'effecteur du robot manipulateur. La relation entre les forces de contact et le déplacement de l'effecteur est, souvent, modélisée par une impédance mécanique généralisée, comme une combinaison d'un système masse-frottement-amortissement. Des stratégies de commande ont été développées pour ce type de configuration (Slotine et Li 1988, Bin et *al.* 1992). En général, la commande

des manipulateurs contraints avec ce type d'environnement prend le nom de commande d'impédance.

La seconde classe regroupe les systèmes dont l'environnement des contraintes est caractérisé par une faible rigidité. Les forces de contact sont dans ce cas typiquement faibles; dans ce cas, elles peuvent être négligées ou vues comme étant des perturbations sur le système. La commande de ce type de système est traitée comme si ces contraintes ne sont pas présentes.

La troisième et dernière classe regroupe les systèmes dont l'environnement des contraintes est infiniment rigide. Bien qu'en pratique, une rigidité infinie ne peut exister, mais une telle supposition peut être faite afin d'éviter de dédommager, soit de la surface de travail, soit l'effecteur. Pour ce type de systèmes, on modélise le contact par des contraintes holonomes. Les forces de contact sont donc implicitement définies pour garantir la satisfaction du maintien du contact entre l'environnement et l'effecteur du manipulateur robotique. La formulation de la dynamique des manipulateurs en présence de contraintes holonomes est basée sur une approche particulière en mécanique classique (Arnold, 1989). Dans cette approche, un modèle dynamique non-linéaire incorporant les effets des contraintes est développé. Ce modèle est considéré comme un des meilleurs modèles développés pour les systèmes avec contraintes holonomes. Utilisant cette approche, certains schémas de commande hybride ont été proposés (Yoshikawa 1987, Kankaanranta et Koivo 1988, Mc-Clamroch et Wang 1988, Lin 1989, Cole 1989). Dans cette bibliographie, les auteurs ont développé des lois de commande par couple précalculé. D'autre part, une attention considérable a été aussi allouée à la formulation non-linéaire du problème de la poursuite de trajectoire. Ce problème est, en fait,

catégorisé par les auteurs en trois types. Le premier est de type pratique, il est basé sur le fait que la connaissance exacte de la dynamique complexe du manipulateur avec contraintes ne peut être facilement obtenue. Par conséquent, une attention particulière doit être faite, si le système comporte des paramètres inconnus ou s'il est soumis à des perturbations externes. Les lois de commande telles qu'étudiées par les références ci-dessus engendrent, dans ce cas des performances dégradantes du système, et peut même engendrer une instabilité au système. Pour cette raison, des stratégies de commande adaptative (Carelli et Kelly 1989, Jean et Fu 1990, Su et *al.* 1992) et des commandes à structure variables (Huang et Lin 1990) ont été proposées. Le deuxième type de problème est basé sur l'utilisation de la dynamique parfaitement connue pour proposer un schéma de commande non-linéaire avec un observateur asymptotique pour l'estimation des états et des forces de contact (Huang et Tzeng 1988, 1989). Cette approche nécessite un calcul excessivement lourd. Le troisième type de problème est de considérer la flexibilité des joints du manipulateur ou de la surface des contraintes par l'approche des perturbations singulières (Mills 1989, Mc-Clamroch 1989, Vukovich et Mills 1990). Dans cette thèse, on s'intéresse à la résolution du premier type de problèmes en utilisant des techniques de commande robuste .

## **1.2 Motivation de la recherche**

La commande des manipulateurs en présence de contraintes holonomes est un sujet qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. La formulation dynamique des systèmes mécaniques en présence de ces contraintes a été introduites par Goldstein (1950) en utilisant la formalisation de Lagrange. Mc-Clamroch et Huang (1986) ont prouvé que les manipulateurs en chaîne fermée peuvent être caractérisés par des systèmes mécaniques

avec contraintes holonomes, et qui sont décrits mathématiquement par des équations algébro-différentielles. Ceci a constitué une base pour la recherche concernant les systèmes robotiques comportant un contact rigide avec l'environnement. Pour cette classe de systèmes mécaniques, un grand nombre de recherches sur les méthodes de commandes a été entreprises. Raibert et Craig (1981) ont proposé un schéma de commande hybride position/force. Ce schéma est basé sur une sélection de coordonnées environnementales locales et utilise chaque degré de liberté soit pour les coordonnées en force soit pour celles en position. Mc-Clamroch et Wang (1988) ont introduit une méthode basée sur le principe de couple précalculé pour la commande simultanée position/force. Cette approche de commande, basée sur le modèle contraint, produit le même résultat que celui de Raibert et Craig, sauf que les matrices de sélection sont définies dans le modèle. Mills et Goldenberg (1989) ont appliqué la théorie descriptive linéaire pour la commande position/force, en considérant les forces des contraintes comme une partie des variables d'état généralisées.

La dynamique des systèmes robotiques avec contraintes holonomes est décrite par un ensemble d'équations algébro-différentielles de second ordre. Une compréhension profonde de ces équations entraînera certainement une meilleure synthèse de commande de ces systèmes. D'autre part, la connaissance de la dynamique exacte des systèmes robotiques est très difficile à obtenir, ceci est dû à plusieurs facteurs dont la variation des paramètres du manipulateur au cours de l'exécution de sa tâche, les perturbations extérieures pouvant affecter le modèle du système et les dynamiques non modélisées. Pour qu'une commande soit adéquate, il faut qu'elle assure une certaine robustesse quand ces incertitudes sont présentes. En particulier, les différents points motivants notre recherche sont principalement les suivants:



(1) Développer un modèle dynamique des systèmes robotiques avec contraintes holonomes, se basant sur l'approche de Mc-Clamroch et Wang (1988), dont la structure sera similaire à celui d'un système sans contraintes. Ce modèle doit aussi garder les mêmes propriétés cruciales nécessaires à la synthèse de certains types de commande adaptative et robuste.

(2) L'application d'un certain aspect de la théorie des systèmes non-linéaires, d'une façon systématique à la commande position/force des systèmes robotiques avec contraintes holonomes. Cet aspect se base sur la théorie de linéarisation exacte par retour d'état. Ainsi les propriétés de stabilité locale, prouvées par Mc-Clamroch et Wang (1988), peuvent être généralisées à des propriétés globales.

(3) La commande simultanée position/force requiert un retour d'état pour achever des propriétés en chaîne fermée. Les vecteurs des positions désirées et de forces des contraintes désirées sont des parties spécifiées de l'objectif de la commande. Dans cette thèse on considère l'application de certaines techniques de commande robuste et adaptative pour les systèmes robotiques en présences de contraintes holonomes. On cherche à assurer la stabilité asymptotique globale du système incertain et la convergence des erreurs.

### **1.3 Méthodologie**

Utilisant l'approche de Mc-Clamroch et Wang (1988) pour la modélisation des systèmes robotiques avec contraintes holonomes, nous élaborons les propriétés intrinsèques du

modèle dynamique ainsi qu'une étude exhaustive relative à la stabilité du système. Dans cette thèse, trois étapes constituent principalement la méthodologie pour la stabilisation asymptotique et globale des systèmes robotiques en présence de contraintes holonomes.

(1) La transformation des coordonnées naturelles du système en des coordonnées généralisées, faisant imbriquer les équations des contraintes implicitement dans le modèle des systèmes robotiques avec contraintes holonomes. La dynamique du système avec contraintes peut être découplée sous la forme d'une structure spécifique, dans le sens que le mouvement du système peut être dissocié et découplé des forces des contraintes. Certaines propriétés nécessaires à l'élaboration de la commande de ces systèmes doivent être prouvées.

(2) La stabilisation et la commande des systèmes robotiques avec contraintes holonomes nécessitent un retour d'état des variables du système. La technique de linéarisation par retour de sortie sera utilisée pour la linéarisation et le découplage du système. Il sera montré que les variables de position peuvent être commandée indépendamment des variables de force.

(3) Une analyse de robustesse de l'approche de commande par linéarisation par retour de sortie, utilisant l'approche de placement de pôles, ne peut garantir certaines propriétés de robustesse du système face aux incertitudes qui peuvent surgir. Il est ainsi adéquat d'adjoindre des boucles de commande robuste à la commande du système pour garantir une stabilisation asymptotique du système incertain. Les éléments de commande robuste utilisent, en fait,

l'approche de commande à structure variable et une classe de fonction par retour d'état continu. Cette dernière approche robuste est ajoutée pour éliminer l'effet de discontinuité de la commande apporté par la commande à structure variable et ainsi assurer la convergence des accélérations et des forces des contraintes. Une boucle d'adaptation est aussi intégrée pour l'estimation des bornes des incertitudes du système.

#### **1.4 Contributions originales**

Cette recherche porte sur l'analyse et la commande position/force des robots manipulateurs avec contraintes holonomes. À la meilleure connaissance de l'auteur, elle a donné lieu aux contributions suivantes:

- (1) La démonstration que les robots manipulateurs avec contraintes holonomes après une transformation particulière des coordonnées naturelles du système gardent la même structure et les mêmes propriétés que les robots opérant dans des environnements libres de contraintes.
- (2) L'utilisation de la technique de linéarisation par retour de sortie pour le découplage et la linéarisation du système. Cette approche rejoint, en sorte, la technique du couple précalculé appliqué en robotique.
- (3) L'étude exhaustive de la robustesse du système face aux incertitudes sur le modèle et des perturbations externes.

(4) L'emploi des structures de commande robustes appliquées aux systèmes robotiques avec contraintes holonomes.

(5) L'amélioration est apportée pour garantissant la stabilité asymptotique du système incertain par l'emploi de la commande robuste par retour d'état continu. Ceci garantit la convergence des forces des contraintes.

### **1.5 Organisation de la Thèse**

Cette thèse présente des résultats sur la commande des systèmes robotiques avec contraintes holonomes. Elle est constituée de sept chapitres organisés de la façon suivante:

- Le chapitre 2 traite du modèle dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Les caractéristiques et les propriétés du modèle seront exposées. Une étude sur la stabilité de la dynamique du système sera aussi faite. La singularité du modèle nous amène à utiliser une certaine transformation de coordonnées. Nous développons certaines propriétés de la dynamique transformée et généralisons les résultats de stabilité locale du modèle.
- Le chapitre 3 traite de la technique de linéarisation par retour de sortie appliquée aux systèmes robotiques avec contraintes holonomes. Nous montrons qu'on peut assurer un certain découplage des variables de déplacement par rapport aux variables des forces des contraintes. La technique de placement de pôles sera ensuite utilisée pour la commande du système linéarisé et découplé.

- Dans le chapitre 4, nous analysons la robustesse du système face aux perturbations du modèle avec la commande linéarisante et découplante. Nous étudions dans ce chapitre l'adjonction d'une boucle de robustesse utilisant une fonction de retour d'état continue, assurant ainsi la stabilité asymptotique du système incertain. La théorie de Lyapunov est utilisée pour l'étude de la stabilité et l'analyse de robustesse.
- Le chapitre 5 traite de la commande à structure variable appliquée aux systèmes robotiques avec contraintes holonomes. Dans un premier temps, nous étudions l'approche de la commande des systèmes à structure variable, ensuite nous appliquons une commande à structure variable adaptative.
- Dans le chapitre 6, pour éliminer l'effet de la discontinuité de la commande à structure variable, nous modifions la loi de commande en substituant la fonction discontinue par une fonction continue. Nous élaborons aussi une loi d'adaptation pour estimer les bornes des paramètres du système.
- Le chapitre 7 conclue cette thèse et discute des perspectives de recherches futures.

Des simulations numériques d'un manipulateur à deux degrés de liberté commandé par les de commande élaborées font l'objet de la dernière partie des chapitres 3 à 6. Ces simulations sont faites à l'aide du logiciel MATLAB.

## CHAPITRE 2

### SYSTÈMES MÉCANIQUES AVEC CONTRAINTES HOLONOMES

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base de la modélisation des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Dans la section 2.1, nous posons les différentes hypothèses que nous considérerons au cours de cette thèse. La section 2.3 discutera du modèle dynamique des systèmes mécaniques contraints en se basant sur la formulation de Lagrange. Le cas des contraintes holonomes sera considéré et détaillé. Un modèle mathématique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes est développé. Quelques concepts et propriétés associés au modèle sont aussi discutés. Le modèle développé caractérise l'interaction entre la dynamique d'un système mécanique et les contraintes par un vecteur des multiplicateurs de Lagrange, qui sont équivalents aux forces des contraintes dans les systèmes mécaniques. Le modèle mathématique est sous la forme d'un ensemble d'équations algébro-différentielles. Dans la section 2.4 nous discutons des caractéristiques du modèle relatives aux multiplicateurs de Lagrange et à la singularité du modèle. La section 2.5, traite de la solution et de la solvabilité du modèle. Dans la section 2.6 quelques concepts associés à la stabilité de ces équations algébro-différentielles sont discutés. Dans la section 2.7, nous établissons une transformation des coordonnées du système et nous élaborons le modèle dynamique réduit du système. Cette transformation a pour but de simplifier la présentation du système afin de le rendre plus adéquat aux processus de commande. Dans la section 2.8, nous étudions les concepts relatifs à la stabilité locale du système transformé. Dans la section 2.9 nous

étudions l'influence de la présence des forces de frottement de Coulomb sur le modèle du système.

## 2.2 Hypothèses

Dans tout ce qui suit, les hypothèses suivantes seront considérées.

**Hypothèse 2.1** *On suppose que les manipulateurs sont modélisés comme des corps rigides articulés. La flexibilité des joints n'est pas considérée ici. Également la redondance des manipulateurs n'est pas considérée.*

**Hypothèse 2.2** *Le contact entre l'effecteur et l'environnement de travail est supposé rigide et ponctuel.*

## 2.3 Formulation de la dynamique du système

Les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes sont le résultat de l'interaction de deux parties majeures. La première est représentée par la dynamique du manipulateur lorsque les contraintes sont absentes. Elle est déterminée à partir des fonctions énergétiques (cinétiques et potentielles) du système. La seconde partie est représentée par les contraintes holonomes qui définissent l'espace de mouvement du système. Le mouvement contraint est caractérisé par un ensemble de forces de contact qui maintiennent le mouvement du système sous les contraintes holonomes.

Pour développer le modèle dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes, nous suivrons les étapes suivantes. En premier, nous introduisons les expressions algébriques des contraintes holonomes ainsi que la variété des contraintes correspondantes. Ensuite, en se basant sur les équations de Lagrange, nous développerons le modèle mathématique du système. Certaines propriétés du modèle seront établies et discutées. Le contenu de cette section présente une extension des résultats de Goldstein (1950), Greenwood (1977), Mc-Clamroch et Huang (1986) et Mc-Clamroch et Wang (1988).

### 2.3.1 Variété des contraintes

L'existence de contraintes holonomes est la plus importante caractéristique des systèmes que nous considérons. Durant l'exécution d'une tâche, un manipulateur contraint change de structure cinématique, d'une chaîne cinématique ouverte, lors d'un déplacement libre, à une chaîne cinématique fermée, quand il entre en contact avec son environnement. Nous considérons les chaînes cinématiques fermées dont la dynamique est déduite de celle à chaîne cinématique ouverte, en imposant des contraintes de mouvement au dernier membre du manipulateur. Soit  $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^n$  le vecteur des  $n$  variables des coordonnées généralisées du système dans l'espace de configuration. Les contraintes holonomes limitent le mouvement du système à un sous ensemble, appelé l'espace de mouvement, de l'espace euclidien. Ce sous-ensemble est défini mathématiquement par la solution d'un ensemble de  $m$  équations de contraintes holonomes, qui, en général, sont décrites par  $m$  équations algébriques non-linéaires,  $\phi_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Puisque les contraintes de types holonomes sont définies comme étant des contraintes qui dépendent uniquement des



positions généralisées du système mécanique. Elles peuvent être modélisées mathématiquement par:

$$\phi_i(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$ .

**Hypothèse 2.3** *Le contact entre le manipulateur et la surface des contraintes est supposé sans frottement.*

**Hypothèse 2.4** *La surface des contraintes est supposée régulière et bien définie. Les contraintes sont supposées aussi stationnaires.*

**Hypothèse 2.5** *Le nombre des fonctions des contraintes est supposé être inférieur au nombre de coordonnées généralisées  $n$ , i.e.  $0 < m < n$ .*

**Définition 2.1** Soit  $S$  le sous-espace définissant le mouvement du système mécanique sous les contraintes définies par (2.1),  $S$  est donc défini par

$$S = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \phi(\mathbf{p}) = 0; i = 1, \dots, m\} \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$  et  $\phi(\mathbf{p}) = [\phi_1(\mathbf{p}) \quad \dots \quad \phi_m(\mathbf{p})]^T$

**Hypothèse 2.6** *La fonction vectorielle,  $\phi$ , définie de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , est supposée être suffisamment lisse avec des dérivées continues. Elle est au moins deux fois dérivable.*

**Hypothèse 2.7** *Soit  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur des  $n$  variables des coordonnées généralisées du système dans l'espace des articulations. On suppose qu'il existe une fonction*

cinématique directe  $\mathbf{H}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  inversible et au moins deux fois dérivable satisfaisant la relation suivante:

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}(\mathbf{q}). \quad (2.3)$$

Il est maintenant possible de définir le sous espace des contraintes en fonction des coordonnées généralisées des articulations par  $\Phi(\mathbf{q}) = \phi(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ , telles que les  $m$  équations de contraintes environnementales sont représentées sous la forme d'équations algébriques non-linéaires

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

avec  $\Phi(\mathbf{q}) = [\Phi_1(\mathbf{q}), \dots, \Phi_m(\mathbf{q})]^T$ .

**Hypothèse 2.8** On suppose que l'ensemble des solutions,  $\{\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n / \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}\}$ , est non vide.

L'hypothèse 2.8 veut dire qu'on suppose que le manipulateur est soumis continuellement aux contraintes.

**Hypothèse 2.9** On suppose que les fonctions des contraintes sont indépendantes dans le sens que la matrice Jacobienne  $J(\mathbf{q})$  de dimension  $m \times n$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) =: \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.5)$$

est de plein rang pour tout  $\mathbf{q}$  satisfaisant (2.4). Si seulement des propriétés locales sont concernées au voisinage d'un  $\mathbf{q}_0$  particulier satisfaisant

$$\Phi(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

cette hypothèse d'indépendance peut être réduite à l'hypothèse que la matrice Jacobienne constante  $\mathbf{J}(\mathbf{q}_0)$  est de plein rang  $m$ .

Les déplacements du système et, implicitement, les vitesses sont limités par les contraintes holonomes. Considérant la dérivée première des contraintes (2.4) par rapport au temps, les  $m$  contraintes sur les vitesses généralisées seront donc définies par

$$\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Cette condition implicite des contraintes sur  $\dot{\mathbf{q}}$  implique que les vitesses du mouvement doivent être dans le plan tangent de l'ensemble des contraintes en tout point  $\mathbf{q}$  satisfaisant  $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ . Les équations des contraintes (2.4) et la contrainte implicite (2.7) définissent l'espace de mouvement du système.

**Définition 2.2** Pour un système mécanique avec contraintes, la variété des contraintes  $S$  est définie par

$$S = \{ \mathbf{q} \in \mathcal{R}^n : \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}, \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \} \quad (2.8)$$

Les hypothèses précédentes garantissent que la variété  $S$  est dérivable sur  $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$ .

La caractéristique importante de cette variété des contraintes est qu'un ensemble des  $n-m$  déplacements indépendants doit être défini par l'équation (2.4), donc les dérivées de ces variables forment un ensemble de vitesses indépendantes. En particulier, et sans perte de généralité, on suppose que les dernières  $n-m$  variables des  $n$  éléments du vecteur  $\mathbf{q}$  peuvent être choisies comme un ensemble de variables indépendantes. La matrice Jacobienne,  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ , peut être divisée en deux parties comme:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = [\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{q})]^T \quad (2.9)$$

avec  $\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , et  $\mathbf{J}_2(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ .

**Hypothèse 2.10** La matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est supposée non-singulière.

### 2.3.2 Équations de Lagrange

Pour un manipulateur en chaîne ouverte, les équations du mouvement peuvent être obtenues en utilisant les équations de Lagrange ou d'autres techniques similaires. Ainsi, il faut trouver un ensemble de coordonnées généralisées paramétrisant l'espace de configuration du système. Ensuite, il faut formuler la dynamique du système en termes de ces coordonnées et des forces généralisées correspondantes. Pour écrire les équations du mouvement, on définit le Lagrangien,  $L$ , comme la différence explicite de l'énergie cinétique du système  $T$  et de son énergie potentielle  $V$ . Le potentiel,  $V$ , est une fonction de position uniquement et doit être indépendant des vitesses généralisées. On écrit ainsi

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \quad (2.10)$$

où  $T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont deux fonctions scalaires.

Les équations de Lagrange du mouvement d'un système mécanique sans contraintes sont:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

où  $q_i \in \mathbb{R}$  est la position de la  $i$ ème coordonnée généralisée du système,  $\dot{q}_i \in \mathbb{R}$  est la vitesse de la  $i$ ème coordonnée généralisée du système et  $u_i \in \mathbb{R}$  est la force extérieure agissant sur la  $i$ ème coordonnée généralisée.

Sous une forme vectorielle, les équations de Lagrange du système sans contraintes s'écrivent sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u}; \quad (2.12)$$

$\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des coordonnées généralisées du système et  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des vitesses généralisées du système,  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$  représente le vecteur des couples généralisés appliqués aux articulations.

Intuitivement, on peut formuler l'expression de l'énergie cinétique d'un système mécanique, en particulier d'un manipulateur, sous une forme quadratique, telle que

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) =: \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{M}(\mathbf{q}): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$  est la matrice décrivant la distribution de masse du manipulateur comme fonction du vecteur des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$ . L'unité de chaque élément de  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  est le  $\text{kgm}^2$ .  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  est appelée la matrice d'inertie du système.

**Hypothèse 2.11** *On suppose que la matrice  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  est continûment dérivable pour tout  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ .*

En tenant compte de (2.10), on peut reformuler l'expression du Lagrangien du système en fonction de la matrice d'inertie du système comme

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) =: \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) \quad (2.14)$$

**Hypothèse 2.12** *On suppose que la fonction de l'énergie potentielle  $V(\mathbf{q})$  est au moins deux fois continûment dérivable pour tout  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ .*

En dérivant l'équation de Lagrange du système et en remplaçant le terme du Lagrangien par son expression (2.14), on obtient l'équation dynamique du système

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (2.15)$$

avec 
$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) =: \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} =: \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.17)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces d'inertie,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces de gravitation et  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis .

**Remarque 2.1:** Il est à noter que les forces de frottement des articulations du manipulateur sont souvent modélisées à l'intérieur du terme  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ . Cependant, pour la commodité de la dérivation d'une solution analytique, ces forces sont temporairement négligées.

Le vecteur  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  peut être mis sous la forme suivante (Craig, 1988)

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

avec

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} =: \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.19)$$

**Propriété 2.1** *La matrice  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est antisymétrique.*

**Preuve:** Soit  $m_{ij}(\mathbf{q})$  l'élément  $i$ - $j$  de  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , l'élément correspondant de  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$  est

$$\dot{m}_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.20)$$

Il est à remarquer que  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$  est une forme linéaire de  $\dot{\mathbf{q}}$ .

En calculant l'élément  $i$ - $j$  de  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , on obtient

$$n_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k. \quad (2.21)$$

La matrice  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est donc antisymétrique.

□

**Propriété 2.2** *Certaines propriétés concernant la matrice d'inertie  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  peuvent être énoncées, Craig (1988)*

- (1)  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  est symétrique.
- (2)  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  est définie positive et bornée.
- (3)  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$  existe et elle est définie positive et bornée.

La propriété (2) peut être formulée de la façon suivante

$$\beta_1 \mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \beta_2 \mathbf{I}_n \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ ,  $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < \beta_1 < \beta_2$ .

**Preuve:** La preuve de cette propriété se trouve dans Graig (1988).

### 2.3.3 Dynamique du manipulateur en chaîne fermée

En imposant une contrainte de contact au dernier membre du manipulateur, les liaisons du manipulateur forment une chaîne fermée. Les manipulateurs en chaîne fermée ont été étudiées par Draganoiu et *al.* (1982), Hemami et Wyman (1979) et Orin et Oh (1981).

Soit  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^n$  le vecteur des coordonnées du manipulateur dans l'espace de configuration. En imposant au système des contraintes holonomes de type (2.4), une chaîne fermée est formée à travers le contact du dernier membre du manipulateur avec la variété des contraintes  $S$  définie par (2.8).

**Hypothèse 2.13** *On suppose que les vecteurs des gradients  $\nabla\phi_1(\mathbf{p}), \dots, \nabla\phi_m(\mathbf{p})$  sont linéairement indépendants pour tout  $\mathbf{p} \in S$ .*

Les contraintes (2.4) définissent donc une variété lisse de dimension  $m$ . Si  $\mathbf{p}_0$  est un point sur  $S$ , on peut donc définir l'espace normal de  $S$  en  $\mathbf{p}_0$  par

$$N(\mathbf{p}_0) = \left\{ \mathbf{p} : \mathbf{p} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla\phi_i(\mathbf{p}_0), \alpha_i \in \mathfrak{R}, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (2.24)$$

On définit aussi l'espace tangent de  $S$  en  $\mathbf{p}_0$  par

$$T(\mathbf{p}_0) = \{ \mathbf{p} : \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle = 0, \mathbf{y} \in N(\mathbf{p}_0) \}, \quad (2.25)$$

$N(\mathbf{p}_0)$  et  $T(\mathbf{p}_0)$  sont deux sous-espaces de  $\mathfrak{R}^n$  et forment deux compléments orthogonaux, et l'on peut écrire donc

$$\mathfrak{R}^n = T(\mathbf{p}_0) \oplus N(\mathbf{p}_0) \quad (2.26)$$

Soit  $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}^n$  le vecteur des forces généralisés dans l'espace des articulations requis pour maintenir la condition de maintien des contraintes sur la variété  $S$ . L'équation de la dynamique en chaîne fermée du système, considérant les forces de contact et tenant compte de (2.15), peut être formulée par l'équation (Goldstein, 1950),

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{f} + \mathbf{u} \quad (2.27)$$



Selon le principe du travail virtuel de D'Alembert, aucun travail n'est donc associé au couple de contact  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^n$  lors d'un déplacement virtuel  $\delta \mathbf{q}$ .

**Remarque 2.2:** Ce principe n'est pas valide s'il existe des forces de frottement et si les forces varient dans le temps.

**Proposition 2.1** *Soit le système mécanique avec contraintes holonomes, décrit par le système d'équations différentielles (2.4) et respectant le système d'équations des contraintes (2.15). Sous les hypothèses 2.5-2.13, les forces des contraintes du système mécanique avec l'hypersurface des contraintes sont directement liés au vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathcal{R}^m$  par*

$$\mathbf{f} = \left( \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \lambda = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \lambda \quad (2.28)$$

**Preuve:** Selon le principe de d'Alembert, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta q_i = 0 \quad (2.29)$$

où d'une manière équivalente, dans l'espace de configuration

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta \mathbf{p}_i = 0 \quad (2.30)$$

où  $\delta q_1, \dots, \delta q_n$  ( $\delta \mathbf{p}_1, \dots, \delta \mathbf{p}_n$ ) représentent les déplacements virtuels scalaires du manipulateur dans l'espace des articulations (de configuration) et  $f_i$  est la  $i$ ème composante du vecteur des forces généralisées dans l'espace de configuration.

$$\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T \quad (2.31)$$

Sous l'hypothèse 2.7 l'égalité (2.30) devient

$$\sum_{i=1}^n f_i \delta p_i = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m f_i \frac{\partial H_l(\mathbf{q})}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (2.32)$$

Donc

$$f_i = \sum_{l=1}^m f_l \frac{\partial H_l(\mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

À partir des équations de contraintes (2.1), on sait que les déplacements virtuels  $\delta p_1, \dots, \delta p_n$  doivent satisfaire l'équation suivante

$$\delta \phi_j(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} \delta p_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.34)$$

Introduisons maintenant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  et multiplions l'équation précédente par  $\lambda_j$  pour obtenir

$$\lambda_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j(\mathbf{p})}{\partial p_i} \delta p_i = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.35)$$

La sommation de ces  $m$  équations donne

$$\sum_{i=1}^n \left[ f_i - \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial \phi_l(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right] \delta p_i = 0 \quad (2.36)$$

Parce que  $\frac{\partial \phi_1(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \dots, \frac{\partial \phi_m(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$  sont des vecteurs linéairement indépendant, les paramètres

$\lambda_i, i = 1, \dots, m$  peuvent être choisis de la forme suivante:

$$f_i = \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial \phi_l(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

Les composantes du vecteur des forces de contact dans l'espace des articulations seront donc

$$f_i = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \phi_j(\mathbf{p})}{\partial p_l} \frac{\partial H_l(\mathbf{q})}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.38)$$

Sous forme vectorielle, cette relation s'écrit

$$\mathbf{f} = \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \left( \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.39)$$

ou encore

$$\mathbf{f} = \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.40)$$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés.  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est telle que définie par (2.5) ou encore.

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) = \left( \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \quad (2.41)$$

□

L'équation de la dynamique du manipulateur avec les contraintes peut être reformulée maintenant en fonction du vecteur des multiplicateurs de Lagrange par

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.42)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (2.43)$$

Les équations (2.42) et (2.43), constituent un ensemble d'équations algébro-différentielles. Les premières  $n$  équations (2.42), sont des équations différentielles de second ordre. Les  $m$  équations (2.43) sont des équations algébriques. Ces  $(n+m)$

équations caractérisent la dynamique du mouvement du système sur la variété des contraintes  $S$ .

## 2.4 Caractéristiques du Modèle

Dans cette section, nous discutons deux principales caractéristiques du modèle développé dans la section précédente: les multiplicateurs de Lagrange et la singularité du modèle.

### 2.4.1 Multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange, introduits par les contraintes holonomes, caractérisent l'effet des contraintes holonomes sur la dynamique du système. Ils affectent le mouvement du système d'une manière très complexe. Il est possible d'éliminer les multiplicateurs de Lagrange du modèle mathématique de la dynamique du système, mais cette approche est généralement non souhaitable à cause de la complexité du modèle mathématique qui sera engendré, comme nous le verrons plus loin. La relation entre les forces de contact et les multiplicateurs de Lagrange peut être déduite directement à partir de la relation (2.36) de la section précédente, sous sa forme vectorielle:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\lambda \quad (2.44)$$

$\mathbf{f} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces de contraintes.

Les forces des contraintes peuvent faire part des spécifications de conception de la commande du système et donc peuvent être mesurées pour cet effet. Cependant elles ne sont pas adéquates pour des fins d'analyse des systèmes avec contraintes. Les  $m$

multiplicateurs de Lagrange caractérisent les  $m$  degrés de liberté qui sont perdus à cause de l'existence des  $m$  contraintes holonomes indépendantes. Parce que  $\mathbf{f}$ , le vecteur des forces de contact, est d'ordre  $n$ , avec  $n > m$ , les  $n$  composantes de ce vecteur sont dépendantes et cette dépendance implicite fait que l'analyse directe utilisant les forces de contact est onéreuse.

Les multiplicateurs de Lagrange, et donc les forces de contact, sont des fonctions du vecteur des déplacements généralisés  $\mathbf{q}$ , du vecteur des vitesses généralisées  $\dot{\mathbf{q}}$  et du vecteur des couples d'entrée  $\mathbf{u}$ . Ceci peut être démontré en utilisant la deuxième dérivée par rapport au temps de l'équation (2.7), qui donne:

$$J(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \frac{d}{dt}J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

La substitution de (2.45) dans (2.42) donne,

$$\lambda = \left( J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})J^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} \left[ J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{u}) - \frac{d}{dt}J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.46)$$

**Hypothèse 2.14** La matrice  $\left( J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})J^T(\mathbf{q}) \right)^{-1}$  est continûment dérivable pour tout  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ .

La relation (2.46) est valide pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$ . Si on substitue (2.46) dans (2.42) on obtient le système d'équations différentielles suivant sans les multiplicateurs de Lagrange:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}(\mathbf{q})(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})) - J^T(\mathbf{q})\left( J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})J^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} \left( \frac{d}{dt}J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{W}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (2.47)$$

où

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - J^T(\mathbf{q})\left( J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})J^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} J(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (2.48)$$

Pour toute condition initiale dans la variété des contraintes  $S$  définie en (2.8) et pour n'importe quelle fonction d'entrée  $u$ , la solution unique du système d'équations différentielles (2.42)  $q(t)$  et  $\dot{q}(t)$ , et  $\lambda(t)$  définie de l'équation algébrique (2.46), satisfait (2.47) et (2.48).

La dérivation des équations (2.47)-(2.48) révèle que l'élimination des multiplicateurs de Lagrange mène à un système d'équations différentielles assez complexes. Au contraire, les équations (2.42)-(2.43) retiennent une simplicité de structure. Il sera donc plus adéquat de développer les approches d'analyse et de conception des systèmes avec contraintes holonomes à partir des équations algébro-différentielles de départ.

#### 2.4.2 Singularités du modèle

Les équations algébro-différentielles caractérisant le modèle des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes sont des équations différentielles singulières. Elles sont souvent appelées des équations descriptives ou généralisées (Lumberger 1977). En arrangeant les équations (2.42)-(2.43) sous une forme d'équations différentielles de premier ordre, on peut obtenir la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \Phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Notons que la matrice des coefficients des dérivées est singulière. Il n'existe aucun moyen de réarranger ces équations en un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Dans ce sens, les systèmes contraints sont singuliers. Cependant, comme on le verra dans

la section suivante, ils appartiennent à une classe spéciale de systèmes singuliers solvables (Mc-Clamroch et Wang 1988).

Il a été montré que ces équations singulières ne sont pas des équations différentielles ordinaires (Petzold 1982). Donc la majorité des techniques utilisées pour résoudre les équations différentielles ordinaires ne peuvent être directement utilisées dans ce contexte. Par exemple, toutes les méthodes d'intégration numérique connues des équations différentielles ne peuvent être utilisées pour résoudre ces équations singulières (Gear et Petzold 1984).

## 2.5 Solution et solvabilité du modèle

Le mouvement d'un système mécanique avec contraintes est déterminé par la solution des équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43). Ces équations étant singulières, l'existence donc d'une solution unique devrait être démontrée. Dans les systèmes contraints, le mouvement est restreint sur la variété des contraintes, les conditions initiales seront donc considérées comme appartenant à cette variété.

**Définition 2.3** Un ensemble de conditions initiales  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$  est dit consistant avec le système contraint, défini par les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43), s'il est sur la variété des contraintes  $S$ , c'est à dire qu'il satisfait

$$\Phi(\mathbf{q}_0) = 0 \quad (2.50)$$

et 
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}}_0 = 0. \quad (2.51)$$

**Définition 2.4** Étant donné une fonction du vecteur d'entrée  $\mathbf{u}(t)$ , continu par morceaux pour  $t \geq 0$ , la fonction des vecteurs triplet  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \lambda(t))$  est dite être une solution du

système contraint avec des conditions initiales consistantes  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$  si et seulement si le triplet satisfait les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) pour tout  $t \geq 0$ .

À noter qu'il n'y a aucune condition faite quant au vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda(t)$ . Cependant, une emphase doit être mise sur ce vecteur, puisqu'il constitue une partie de la solution du système contraint et affecte l'accélération du système par l'effet de l'équation (2.46).

**Définition 2.5** Un système contraint décrit par les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) est dit solvable, si pour tout vecteur d'entrée  $\mathbf{u}(t)$ , continu par morceaux, et toute paire de conditions initiales  $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$ , il existe une solution unique  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \lambda(t))$  des équations (2.42)-(2.43). Il est à noter que  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \in S$  pour  $t \geq 0$ .

**Théorème 2.1** *Étant donné une fonction du vecteur d'entrée  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ , continue par morceaux sur  $t \geq 0$  et une condition initiale consistante  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ , sous les hypothèses 2.7-2.14, il existe une constante positive  $\varepsilon > 0$ , tel qu'il existe un vecteur de déplacement unique  $\mathbf{q}(t)$  et un vecteur des multiplicateurs de Lagrange unique  $\lambda(t)$  satisfaisant (2.42)-(2.43) pour  $0 \leq t \leq \varepsilon$ ,  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ . Dans ce sens les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) sont solvables.*

**Preuve:** Nous montrons qu'on peut trouver  $\mathbf{q}(t)$  et  $\lambda(t)$  satisfaisant les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) et que ces solutions sont uniques.

i) Existence: Dans le paragraphe 2.4.1 nous avons déterminé l'expression de  $\lambda$  par l'équation:



$$\lambda = \left( \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{u}) + \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right]$$

La substitution de cette équation dans (2.42) permet d'obtenir

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{W}(\mathbf{q})\mathbf{u} \quad (2.52)$$

avec

$$\mathbf{W}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \left( \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (2.53)$$

$$\text{et } \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{W}(\mathbf{q}) \left( \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \right) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \left( \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \right)^{-1} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.54)$$

Si le vecteur d'entrée,  $\mathbf{u}$ , est une fonction connue, l'équation (2.52) est donc un ensemble de  $n$  équations différentielles de second ordre en  $\mathbf{q}$ . Sous les hypothèses 2.7-2.15 et pour une paire de conditions initiales  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ , l'ensemble des équations différentielles ordinaires a une solution  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  pour  $t \geq 0$ . Si cette condition initiale est consistante, la fonction des vecteurs  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  et le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda(t)$  déterminée par l'équation (2.46) forment une solution de (2.42)-(2.43).

L'équation des contraintes est satisfaite parce que

$$\Phi(\mathbf{q}(0)) = 0 \quad (2.55)$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}(t)) \Big|_{t=0} = \mathbf{J}(\mathbf{q}(0))\dot{\mathbf{q}}(0) = 0 \quad (2.56)$$

Selon (2.55) et (2.56), on peut vérifier que la seconde dérivée de  $\Phi(\mathbf{q}(t))$  par rapport au temps est identiquement nulle à  $t=0$ , c'est à dire,

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{q}(t)) \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.57)$$

La fonction des contraintes est identiquement nulle pour tout  $t \geq 0$ . Le triplet  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \lambda(t))$  est donc une solution du système d'équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43).

ii) Unicité: La solution  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  est unique parce que l'ensemble d'équations différentielles ordinaires (2.52) possède une solution unique. L'unicité de la solution correspondante au vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda(t)$  est évidente à partir de (2.46). Puisque la fonction vectorielle  $\mathbf{u}(t)$  est continue par morceaux et que  $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \in S$  sont arbitraires, le système d'équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) est donc soluble.

□

## 2.6 Concepts relatifs à la stabilité du modèle

Dans cette section, nous introduisons quelques concepts relatifs à la stabilité des équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43). L'analyse de la stabilité des systèmes avec contraintes est légèrement différente des systèmes définis par des équations différentielles ordinaires.

Considérons le système d'équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43).

**Définition 2.6** En l'absence d'un vecteur d'entrée  $\mathbf{u}$ , une paire  $(\mathbf{q}_*, \lambda_*)$  telle que  $(\mathbf{q}_*, 0, \lambda_*)$  est une solution de (2.42)-(2.43), est un point d'équilibre s'il satisfait

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}_*) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}_*)\lambda_* \quad (2.58)$$

$$\Phi(\mathbf{q}_*) = 0 \quad (2.59)$$

**Définition 2.7** Un point d'équilibre  $(\mathbf{q}_*, \lambda_*)$  est dit localement stable sur la variété des contraintes dans le sens de Lyapunov si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  telle que pour toute condition initiale consistante  $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$  satisfaisant

$$\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| < \delta \quad (2.60)$$

la solution,  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \lambda(t))$ , des équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) satisfait

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (2.61)$$

**Définition 2.8** L'état d'équilibre  $(\mathbf{q}_*, \lambda_*)$  est dit asymptotiquement localement stable sur la variété des contraintes dans le sens de Lyapunov s'il est localement stable sur la variété des contraintes et si de plus  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}_*$ , et  $\dot{\mathbf{q}}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Définition 2.9** Un point d'équilibre est dit localement instable sur la variété des contraintes dans le sens de Lyapunov s'il n'est pas localement stable sur la variété des contraintes.

Notons que dans ces définitions, il n'y a pas de référence faite aux multiplicateurs de Lagrange qui constituent une partie de la solution du système contraint. Mais comme nous l'avons vu précédemment, les multiplicateurs de Lagrange ont pour expression:

$$\lambda = (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \left[ \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{u}) - \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right].$$

**Proposition 2.2** (Wang, 1988) Soit  $(\mathbf{q}_*, \lambda_*)$  un point d'équilibre des équations (2.42)-(2.43). Sous les hypothèses 2.7-2.15, les deux énoncées suivantes sont équivalentes

(1) pour tout  $\varepsilon_1 > 0$ , il existe un  $\delta_1 > 0$  telle que si

$$\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| < \delta_1 \quad (2.62)$$

donc la solution de (2.42)-(2.43) satisfait

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| < \varepsilon_1, \quad t \geq 0 \quad (2.63)$$

(2) pour tout  $\varepsilon_2 > 0$ , il existe un  $\delta_2 > 0$  telle que si

$$\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| + \|\lambda(0) - \lambda_*\| < \delta_2 \quad (2.64)$$

donc la solution de (2.42)-(2.43) satisfait

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_*\| + \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| + \|\lambda(t) - \lambda_*\| < \varepsilon_2, \quad t \geq 0. \quad (2.65)$$

**Remarque 2.3:** Si un contrôleur est conçu de manière que chacune des forces sur la variété des contraintes  $\lambda \in \mathcal{R}^m$  est toujours positive, les contraintes holonomes sont donc toujours satisfaites. La variété des contraintes  $\mathcal{S}$  est ainsi invariante.

## 2.7 Dynamique réduite des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes

La singularité des équations (2.42)-(2.43) rend l'analyse du système plus délicate. Cette singularité se traduit par une dépendance des composantes  $q_1, \dots, q_n$  du vecteur des coordonnées des articulations  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ .

Dans cette section, nous appliquons une méthode de transformation non-linéaire de coordonnées pour les systèmes contraints décrits par les équations (2.42)-(2.43). Cette méthode utilise une transformation particulière pour décomposer les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43). Nous développons un modèle dynamique réduit dans lequel les équations des contraintes sont implicitement imbriquées dans la dynamique du système.

### 2.7.1 Transformation de coordonnées

Nous introduisons une transformation non-linéaire pour obtenir la décomposition désirée des équations (2.42)-(2.43).

La dynamique des systèmes considérés, développée à la section 2.3 est donnée par

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0$$

où  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des coordonnées généralisées du système,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des vitesses généralisées,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des accélérations généralisées,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^m$  représente le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux forces des contraintes,  $\Phi: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$  représente la fonction des contraintes holonomes,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times m}$  est la matrice Jacobienne de  $\Phi(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est la matrice d'inertie du système supposée symétrique définie positive pour tout  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis et  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur des forces gravitationnelles.

**Hypothèse 2.15** Selon l'hypothèse 2.9, le vecteur  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$  peut être convenablement arrangé sous la forme:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^m$  et  $\mathbf{q}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$ .

tel que la matrice Jacobienne  $\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_1} \in \mathcal{R}^{m \times m}$  est non singulière.

**Théorème 2.2** (Théorème des fonctions implicites, Isidori 1989) Soit  $A \subset \mathbb{R}^m$  et  $B \subset \mathbb{R}^n$  deux ensembles ouverts. Soit  $F: A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Soit  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  un point de  $A \times B$ . Supposons que, pour un  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in A \times B$  satisfaisant,

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = 0 \quad (2.67)$$

et que la matrice Jacobienne

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

est non-singulière en  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$ . Il existe donc un voisinage ouvert  $A_0$ , de  $\mathbf{x}^0$  dans  $A$ , un voisinage ouvert  $B_0$ , de  $\mathbf{y}^0$  dans  $B$  et une fonction unique de classe  $C^\infty$   $G: A_0 \rightarrow B_0$  telle que

$$F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = 0 \quad (2.69)$$

pour tout  $\mathbf{x} \in A_0$ .

**Remarque:** On rappelle qu'une fonction de classe  $C^\infty$  est une fonction continue infiniment dérivable.

**Propriété 2.3** Selon l'hypothèse 2.6 et selon le théorème des fonctions implicites, il existe un ensemble ouvert  $\theta \subset \mathbb{R}^{n-m}$  et une unique fonction dérivable  $\Omega: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que pour tout  $\mathbf{q}_2 \in \theta$ , on a

$$\Phi(\Omega(\mathbf{q}_2), \mathbf{q}_2) = 0. \quad (2.70)$$

D'une manière équivalente, cette propriété implique que la relation  $\mathbf{q}_1 = \Omega(\mathbf{q}_2)$  est une solution unique de (2.70), et que  $\mathbf{q}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$  et  $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^m$  peuvent être considérées respectivement comme des variables indépendantes et dépendantes. En d'autres termes, les relations

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \text{ et } \mathbf{q}_1 = \Omega(\mathbf{q}_2) \quad (2.71)$$

représentent la même expression des équations de contraintes.

Pour que les équations des contraintes  $\mathbf{q}_1 = \Omega(\mathbf{q}_2)$  deviennent implicites dans la dynamique du système, une transformation de coordonnées doit être faite, de manière à présenter les équations des contraintes sous une forme simple, dans les nouvelles coordonnées.

Considérons la transformation de coordonnées suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}: \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x} &=: \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 - \Omega(\mathbf{q}_2) \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$\mathbf{X}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  est continûment dérivable pour tout  $\mathbf{q}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$  et  $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^m$ . Cette transformation admet une transformation inverse  $\mathbf{Q}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}: \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q} &=: \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \Omega(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{x} =: \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

$\mathbf{Q}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  est aussi continûment dérivable pour tout  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$  et  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}^m$ .

Définissons la matrice Jacobienne de la transformation inverse par

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_2} \\ 0 & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

où  $\mathbf{T}: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$  est nécessairement non-singulière.  $\mathbf{T}$  étant une fonction de  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{q}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$ , mais par abus de notation on écrit parfois  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_2)$  ou  $\mathbf{T}(\mathbf{q})$  à la place de  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ .

De la même manière, on définit la matrice Jacobienne de la transformation directe  $\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{q})$  par :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_2} \\ 0 & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Cette transformation appliquée aux coordonnées généralisées du système, impose que la composante  $\mathbf{x}_1=0$ . Cette égalité définit l'équation des contraintes holonomes dans les nouvelles coordonnées du système.

Finalement, après avoir défini la transformation  $\mathbf{q}=\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  et sa matrice Jacobienne correspondant  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ , les relations donnant les vecteurs des vitesses et des accélérations généralisées en fonction des nouvelles coordonnées peuvent être obtenues par

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}; \quad (2.77)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}. \quad (2.78)$$



De la même manière les vecteurs des vitesses et des accélérations généralisées dans les nouvelles coordonnées peuvent être obtenus en fonction des coordonnées généralisées naturelles du système par

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}; \quad (2.79)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{U}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.80)$$

**Lemme 2.1** *En considérant la transformation des coordonnées, il est facile d'établir les égalités suivantes:*

$$(1) \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{q}_2,$$

$$(2) \quad \mathbf{x} = \mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2; \quad \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2,$$

$$(3) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2; \quad (2.81)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 \quad (2.82)$$

(4) *La variété des contraintes  $S$  peut être définie en fonction des nouvelles coordonnées généralisées par:*

$$S = \{(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2); \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0} / (\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1) \in \mathcal{R}^{2 \times m}, (\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \in \mathcal{R}^{2 \times (n-m)}\} \quad (2.83)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{E}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times m} \text{ et } \mathbf{E}_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n \times (n-m)} \quad (2.84)$$

sont deux partitions matricielles telle que  $\mathbf{I}_n = [\mathbf{E}_1^T \quad \mathbf{E}_2^T]$ .

**Preuve:** (1) La preuve de (1) vient directement de l'application de la transformation de coordonnées  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$  aux contraintes  $\mathbf{q}_1 = \Omega(\mathbf{q}_2)$ .

(2) Selon la définition de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{E}_2^T$ , il est facile de voir que  $\mathbf{x} = \mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2$  est toujours satisfaite, et ainsi  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2$ ;  $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2$ .

(3) Cette propriété peut être facilement vérifiée en substituant les nouvelles coordonnées généralisées dans (2.77)-(2.78)

- (4) Cette propriété peut être vérifiée en remplaçant directement les nouvelles coordonnées dans (2.8).

□

### 2.7.2 Forme réduite du modèle dynamique des systèmes avec contraintes holonomes

La dynamique des systèmes mécaniques en présence de contraintes holonomes est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ \Phi(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant la transformation des coordonnées  $\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{q})$ , et en substituant les identités (2.81)-(2.82) au sein de la dynamique originale du système, la dynamique transformée s'écrira:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{J}}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.85)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\mathbf{T}(\mathbf{x}) \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})[\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}})\mathbf{T}(\mathbf{x})] \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{Q}(\mathbf{x})) \\ \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}(\mathbf{x}))\mathbf{T}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Selon le lemme 2.1, l'équation (2.85) peut se mettre en fonction des coordonnées généralisées  $\mathbf{x}_2$  comme suit:

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}^* + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\lambda} \quad (2.86)$$

où

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \\
 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \left[ \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) + \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{C}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2), \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \right] \\
 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \\
 \mathbf{u}^* &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{u} \\
 \mathbf{J}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)
 \end{aligned}$$

#### Propriété 2.4

- (1)  $\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)$  est symétrique définie positive.
- (2)  $\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$  définie par

$$\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}^*(\mathbf{x}_2)$$

est antisymétrique.

**Preuve:** (1) Selon son expression,  $\mathbf{M}^*$  est de la forme  $\mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}$  où  $\mathbf{M}$  est symétrique définie positive,  $\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)$  est donc symétrique définie positive.

- (2) l'expression de  $\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$  peut être formulée par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2)) \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_2) - \dot{\mathbf{T}}^T(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2)) \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) \right) \\
 &\quad + \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2) \mathbf{N}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2), \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{N}$  étant antisymétrique, donc

$$\left( \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2) \mathbf{N}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) \right)^T = - \left( \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) \mathbf{N}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2) \right)$$

$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)$  étant symétrique définie positive, on peut écrire alors

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_2) - \dot{\mathbf{T}}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) = \\ & -(\mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_2) - \dot{\mathbf{T}}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\mathbf{T}(\mathbf{x}_2)) \end{aligned}$$

donc  $\mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_2) - \dot{\mathbf{T}}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2))\mathbf{T}(\mathbf{x}_2)$  est antisymétrique

Il vient ainsi que  $\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$  est antisymétrique.

□

Cette propriété est cruciale pour la synthèse de la commande adaptative du manipulateur, qui fera l'objet du chapitre 5.

En appliquant la partition matricielle de la matrice identité (2.84) à (2.86), on aura

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \lambda \quad (2.87a)$$

et

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2 \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_2 \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \lambda. \quad (2.87b)$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{J}(\mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{q}_2)) = [\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{q})] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}_2)}{\partial \mathbf{q}_2} \\ 0 & \mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) \quad 0] \end{aligned}$$

$$\text{avec } \mathbf{J}_1(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_1} \text{ et } \mathbf{J}_2(\mathbf{q}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_2}$$

**Propriété 2.6**  $\mathbf{J}_1^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^*(\mathbf{q}_2) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice carrée nécessairement non singulière.

**Preuve:** Étant donné que  $\frac{\partial \Phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_1} \in \mathcal{R}^{n \times m}$  est non singulière, on peut facilement vérifier que  $\mathbf{J}_1^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^*(\mathbf{q}_2) \in \mathcal{R}^{m \times m}$  est non singulière. On peut aussi vérifier que  $\mathbf{J}_2^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2^T \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2) = 0$ .

□

Les équations de la dynamique du système deviennent ainsi

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \lambda \quad (2.88)$$

et

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2 \mathbf{u}^*. \quad (2.89)$$

**Remarque 2.5: Dynamique réduite du système sur la variété des contraintes  $\mathcal{S}$ :**

L'équation différentielle (2.88), de dimension  $n-m$ , sans le terme relatif aux forces des contraintes  $\lambda \in \mathcal{R}^m$ , caractérise la dynamique du système sur la variété des contraintes  $\mathcal{S}$ . Elle définit ainsi la solution des équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43) sur  $\mathcal{S}$ . Cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2) \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_2^* \quad (2.90)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_2 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T ; \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{E}_2 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T ; \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) \text{ et} \\ \mathbf{u}_2^* &= \mathbf{E}_2 \mathbf{u}^*, \end{aligned}$$

### Propriété 2.7

- (1)  $\mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2)$  est symétrique définie positive.
- (2)  $\mathbf{N}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_{22}^*(\mathbf{x}_2)$  est antisymétrique.

Il est facile de vérifier que ce sous-système préserve la structure standard des équations de Lagrange des systèmes dynamiques sans contraintes, sous leur forme générale suivante

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{x}}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{x}_2} = \mathbf{u}_2^* \quad (2.91)$$

avec 
$$L^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = T^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) - V^*(\mathbf{x}_2) \quad (2.92)$$

et 
$$T^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{x}}_2 \quad (2.93)$$

**Remarque 2.6:** L'équation (2.91) définit les  $m$  équations algébriques définissant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  et qui peuvent être déterminés par

$$\lambda = \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) (\mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{12}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_1^*(\mathbf{x}_2) - \mathbf{u}_1^*) \quad (2.94)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_1 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T ; \mathbf{C}_{12}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T ; \mathbf{G}_1^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2), \\ \mathbf{u}_1^* &= \mathbf{E}_1 \mathbf{u}^* \text{ et } \mathbf{J}_1^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^*(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

**Remarque 2.7.** Dans les nouvelles coordonnées, l'équation des contraintes (2.4) s'écrit

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}. \quad (2.95)$$

## 2.8 Stabilité locale du modèle réduit

Nous établissons dans cette section les concepts relatifs à la stabilité des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes, en fonction des nouvelles coordonnées. Considérons le système d'équations:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ \Phi(\mathbf{q}) &= 0 \end{aligned}$$

Sur la variété des contraintes  $\mathcal{S}$ , en fonction des coordonnées généralisées  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ , cette dynamique est définie par l'ensemble des  $n-m$  équations différentielles de second degré:

$$\mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2)\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_2^* \quad (2.96)$$

Le système des équations algébriques caractérisant les forces des contraintes par le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  est donné par

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2)(\mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2)\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{12}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_1^*(\mathbf{x}_2) - \mathbf{u}_1^*) \quad (2.97)$$

**Lemme 2.2** *Soit le système dynamique défini par les équations algébro-différentielles (2.42)-(2.43), le point d'équilibre  $(\mathbf{q}_*, \boldsymbol{\lambda}_*)$  est dit localement stable sur la variété des contraintes dans le sens de Lyapunov si le point  $\mathbf{x}_{2*}$  est un point d'équilibre localement stable du système d'équations différentielles (2.88).*

**Preuve:** Si  $\mathbf{x}_{2*}$  est un point d'équilibre de (2.88), pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  telle que pour toute paire de conditions initiales  $(\mathbf{x}_2(0), \dot{\mathbf{x}}_2(0))$  on a

$$\|\mathbf{x}_2(0) - \mathbf{x}_{2*}\| + \|\dot{\mathbf{x}}_2(0)\| < \delta. \quad (2.98)$$

Selon la définition 2.7, les coordonnées de la solution  $(\mathbf{x}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_2(t))$  de (2.96) satisfont

$$\|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_{2*}\| + \|\dot{\mathbf{x}}_2(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (2.99)$$

Puisque  $\mathbf{x} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{x}_2]^T$ , on a donc

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s\| + \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0 \quad (2.100)$$

La matrice de transformation  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ , étant non singulière et de norme bornée, il existe donc un  $\varepsilon' > 0$  telle que pour toute condition initiale  $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0))$  vérifiant  $\|\mathbf{q}(0) - \mathbf{q}_s\| + \|\dot{\mathbf{q}}(0)\| < \delta$ , on aura ainsi

$$\|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_s\| + \|\dot{\mathbf{q}}(t)\| < \varepsilon'. \quad t \geq 0 \quad (2.101)$$

□

**Définition 2.10** L'état d'équilibre  $\mathbf{x}_{2s}$  est dit localement asymptotiquement stable dans le sens de Lyapunov s'il est localement stable sur la variété des contraintes, de plus  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_{2s}$ , et  $\dot{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Remarque 2.8:** Si pour l'équation différentielle (2.88), l'état d'équilibre  $\mathbf{x}_{2s}$  est localement (localement asymptotiquement) stable, le vecteur des multiplicateurs de Lagrange est donc borné.

## 2.9 Effet des forces de frottement de Coulomb sur la dynamique du système

Dans cette section nous développons le modèle dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes, lorsqu'un frottement est engendré. D'un point de vue pratique, le fait de supposer que le contact entre le système mécanique et la surface des contraintes est sans frottement reste une hypothèse difficile à respecter. En effet, la plupart de ces contacts engendrent des forces de frottement de Coulomb. Ces forces, comme toute autre force de frottement, sont de nature dissipatrice et ne sont pas linéaires avec la vitesse relative du membre du système en contact.



### 2.9.1 Forces de frottement de Coulomb

Pour illustrer les forces de Coulomb, supposons un corps  $A$  glissant avec une vitesse relative  $v_r$ , sur un corps  $B$ , comme l'illustré la figure 2.1. La force du corps  $B$  agissant sur le corps  $A$  possède une composante  $f_n$  normale à la surface de contact et une composante  $\mu f_n$  parallèle à la surface de contact s'opposant au mouvement relatif du système. Cette force est directement proportionnelle à la force normale  $f_n$ , mais indépendante de l'aire du contact et de la vitesse relative. Ainsi, dans le cas où le glissement existe, nous pouvons établir la relation

$$f_t = -\mu f_n \operatorname{sgn}(v_r) \quad (2.102)$$

où le coefficient de frottement dynamique  $\mu$  dépend uniquement de la rugosité de la surface de glissement et du matériau utilisé. Aussi, la fonction  $\operatorname{sgn}(v_r)$ , prend la valeur  $\pm 1$  dépendamment du signe de la vitesse relative du système.

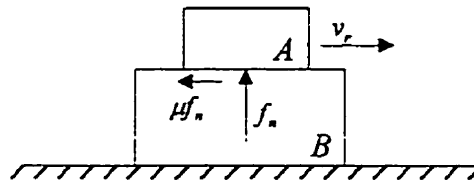


Figure 2.1 Force de frottement de Coulomb

Dans le cas, d'un système mécanique à structure multi-corps, où le dernier membre est soumis aux contraintes holonomes définies par (2.4), le vecteur des forces de Coulomb peut être formulé par

$$\mathbf{F}_t = A_t f_t (\mu, \mathbf{v}_{end}, \lambda) \quad (2.103)$$

où  $A_t$  est une variable spécifiant la direction du vecteur. L'amplitude du vecteur dépend de la force normale du contact ou la force des contraintes, i.e. du vecteur des

multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathcal{R}^m$ , du vecteur des coefficients de frottement  $\mu \in \mathcal{R}^m$  dont le signe est déterminé par la vitesse du membre en contact  $\mathbf{v}_{end}$ .

L'équation (2.103) peut s'écrire sous la forme d'une paramétrisation linéaire en  $\mu \in \mathcal{R}^m$  dépendant du vecteur des coordonnées généralisées  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^n$  et du vecteur des vitesses généralisées  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$ .

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{K}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mu) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \lambda \quad (2.104)$$

$\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est en général dérivable sauf au point où  $\mathbf{v}_{end}$  change de direction sur la surface des contraintes.

L'équation dynamique du système devient

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\lambda + \mathbf{K}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mu)\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\lambda \quad (2.105)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0$$

### 2.9.2 Équations de la dynamique réduite

Dans cette sous-section, nous appliquons la transformation non-linéaire de coordonnées (2.73) au système (2.105). L'analyse est similaire à celle présentée à la section 2.5. Le résultat de cette transformation est:

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}^* + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\lambda + \mathbf{K}^{*T}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mu)\mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\lambda$$

avec

$$\mathbf{K}^{*T}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mu) =$$

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2) [\mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2))\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2) + \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2)\mathbf{C}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2), \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T\mathbf{x}_2), \mu]$$

Après avoir appliqué la partition matricielle de l'identité, on obtient les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_1 \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \lambda + \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^{*T}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mu) \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \lambda \end{aligned} \quad (2.106)$$

et

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2 \mathbf{u}^* + \mathbf{E}_2 \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) \mathbf{K}^{*T}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mu) \lambda \quad (2.107)$$

Contrairement au cas où les forces de frottement de Coulomb ne sont pas considérées dans le modèle du système, l'équation différentielle d'ordre  $n-m$  du système (2.107) est dépendante du vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ . Cette caractéristique rend le processus de commande plus complexe comparée au cas où les forces de frottement de Coulomb ne sont pas considérées.

## 2.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé un modèle dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Un vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux forces des contraintes est introduit dans le modèle. Les équations (2.42)-(2.43) définissant ce modèle ne sont pas appropriées aux processus de commande des systèmes, vu que les variables du système ne sont pas indépendantes. Ainsi, une transformation des coordonnées généralisées du système a été introduite, pour développer un nouveau modèle dynamique en fonction de ces nouvelles coordonnées. Le modèle ainsi établi préserve les propriétés d'un système mécanique sans contraintes sur la variété des contraintes  $S$ . Lorsque les forces de frottement de Coulomb sont considérées, la structure

du modèle présente plus de complexité. Dans les chapitres suivants, il sera l'objet d'élaborer des méthodes de commande des systèmes mécaniques contraints. Le nouveau modèle caractérisé par les équations (2.86), et (2.95) sera le noyau des prochaines étapes de cette dissertation.

## CHAPITRE 3

### COMMANDE PAR LINÉARISATION EXACTE

#### 3.1 Introduction

La technique de linéarisation par retour d'état a été appliquée avec succès aux manipulateurs robotiques opérant dans un environnement libre (Graig 1989). Dans ce chapitre, nous généralisons l'application de cette technique aux manipulateurs robotiques avec contraintes holonomes. Raibert et Craig (1981) ont développé la méthode de la commande hybride appliquée aux systèmes mécaniques contraints. Cette approche a gardé un aspect heuristique, jusqu'à l'étude faite par Mc-Clamroch et Wang (1988). Ces derniers ont généralisé l'approche du couple précalculé pour les systèmes mécaniques contraints. Cependant, ils ont prouvé uniquement la stabilité locale du système. Dans ce chapitre, nous abordons le problème différemment, en utilisant les concepts de la géométrie différentielle (Isidori 1989). Dans la section 3.2 nous rappelons les concepts, les théorèmes et les définitions de base se rapportant à la théorie de la géométrie différentielle. La section 3.3 traite de la technique de linéarisation par retour de sorties et les conditions de son application. La section 3.4, pose l'objectif de la problématique de la commande des systèmes robotiques en présence de contraintes holonomes. Dans la section 3.5 nous étudions l'application de la commande linéarisante et découplante par retour de sorties sur un manipulateur robotique avec contraintes holonomes. Dans la section 3.6, nous détaillons un exemple d'application de la commande linéarisante et découplante sur un robot manipulateur à deux degrés de liberté opérant sur une surface plane.

### 3.2 Concepts théoriques

Dans cette section, nous présentons quelques concepts de base, définitions et théorèmes se rapportant à la théorie de la commande linéarisante et découplante par retour de sorties.

#### 3.2.1 Présentation des systèmes

Pour ne pas nous embarquer dans des concepts compliqués, nous limitons l'analyse aux systèmes ayant le même nombre d'entrées et de sorties  $m$ . Pour le cas général, le lecteur est amené à consulter l'ouvrage d'Isidori (1989). Un système non-linéaire multivariable peut être décrit par la représentation d'état de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

où

$$\mathbf{u} = \text{col}(u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{R}^m \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y} = \text{col}(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{R}^m \quad (3.4)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})] \in \mathcal{R}^{n \times m} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \text{col}(h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})) \in \mathcal{R}^m \quad (3.6)$$

Les  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  sont des champs de vecteurs analytiques, et  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  une submersion analytique de rang  $m$ , définies sur un ensemble ouvert de  $\mathcal{R}^n$ , l'état  $\mathbf{x}$  appartient à  $\mathcal{R}^n$ .

### 3.2.2 Dérivées de Lie

**Définition 3.1** Soit  $h_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  une fonction scalaire analytique, et  $\mathbf{f} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$  un champ de vecteurs analytique sur  $\mathcal{R}^n$ , la dérivée de Lie de  $h_i$  par rapport à  $\mathbf{f}$  est une fonction scalaire définie par  $L_{\mathbf{f}} h_i = \nabla h_i \cdot \mathbf{f}$ . Ainsi, la dérivée de Lie  $L_{\mathbf{f}} h_i$  est simplement la dérivée de  $h_i$  le long de la direction de  $\mathbf{f}$ .

On rappelle que le gradient d'une fonction scalaire  $h_i(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}$  est dénoté par  $\nabla h_i$ , avec  $\nabla h_i = \partial h_i / \partial \mathbf{x}$ . Le gradient est représenté par le vecteur ligne des éléments  $(\nabla h_i)_j = \partial h_i / \partial x_j$ . Par ailleurs, étant donné un champs de vecteur  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , la Jacobienne de  $\mathbf{f}$  est dénoté par  $\nabla \mathbf{f}$ , avec  $\nabla \mathbf{f} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ .  $\nabla \mathbf{f}$  est représenté par une matrice d'ordre  $n \times n$  des éléments  $(\nabla \mathbf{f})_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ .

Les coordonnées de la fonction  $L_{\mathbf{f}} h_i$  sont représentées par

$$(L_{\mathbf{f}} h_i)(x_1, \dots, x_n) = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_i}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Les dérivées de Lie répétitives peuvent être définies récursivement

$$L_{\mathbf{f}}^0 h_i = h_i \quad (3.7)$$

$$L_{\mathbf{f}}^j h_i = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^{j-1} h_i) = \nabla(L_{\mathbf{f}}^{j-1} h_i) \cdot \mathbf{f} \quad j=1,2,\dots \quad (3.8)$$

De la même façon, si  $\mathbf{g}$  est un autre champ de vecteurs, la fonction scalaire  $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})$  est alors

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h_i = \nabla(L_{\mathbf{f}} h_i) \cdot \mathbf{g} \quad (3.9)$$

### 3.2.3 Indice caractéristique

Un système non-linéaire multivariable de la forme (3.1) a un (vecteur) indice caractéristique  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en un point  $\mathbf{x}^0$  si

$$(1) \quad L_{g_j} L_f^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.10)$$

pour tout  $1 \leq j \leq m$ , pour tout  $1 \leq i \leq m$ , pour tout  $k < r_i - 1$  et pour tout  $\mathbf{x}$  dans le voisinage de  $\mathbf{x}^0$ .

(2) la matrice de dimension  $m \times m$

$$\begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

est non-singulière en  $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0$ .

Si un système a un vecteur d'indices caractéristiques  $\{r_1, \dots, r_m\}$  en  $\mathbf{x}^0$ , on a

$$r_1 + \dots + r_m \leq n$$

## 3.3 Commande linéarisante et découplante par retour de sorties

### 3.3.1 Position du problème

Soit un système à  $m$  entrées et  $m$  sorties. On dit que le système est découplé s'il se présente comme un ensemble de  $m$  sous-systèmes mono-entrées mono-sorties indépendants, dans le sens où les entrées du sous-système  $i$  n'affectent pas la sortie  $y_j$  et réciproquement.



De manière générale, un système physique n'est jamais naturellement découplé. Il est alors intéressant de rechercher des transformations de type "bouclages", qui permettront de découpler les systèmes étudiés. Deux types de bouclage sont envisagés dans la théorie, les bouclages statiques sur l'état et les compensateurs dynamiques. Nous nous limitons à la solution du bouclage statique parce que cette solution permet de résoudre le problème pour les systèmes envisagés dans cette thèse.

Le schéma général de la commande est représenté à la figure 3.1

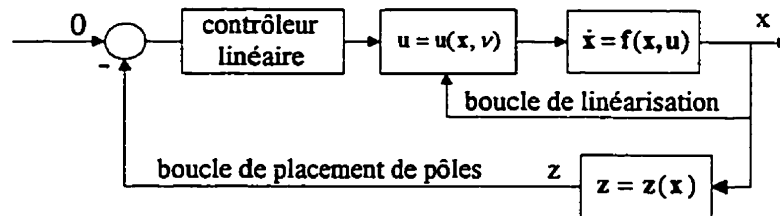


Figure 3.1 Schéma de la commande linéarisante et découplante

### 3.3.2 Résultat général

- Soit le système non-linéaire multivariable définie par

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

- Soit  $\{r_1, \dots, r_m\}$  l'ensemble des indices caractéristiques du système  $(\mathbf{h}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ . Rappelons que ceux-ci sont définis de la manière suivante

$$r_i =: \left\{ \inf l \in \mathbb{N}, \text{ tel que, } \exists j \in \underline{m}, L_{\mathbf{g}_j}^{l-1} h_i \neq 0 \right\} \quad (3.15)$$

avec  $\underline{m} = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Rappelons aussi que  $r_i$  correspond à la première dérivée de  $y_i$  qui fait apparaître explicitement la commande  $u$ :

$$\mathbf{y}^{(r_i)} = L_f^{r_i}(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r_i-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3.16)$$

(1) Soit  $\Delta(\mathbf{x})$  la matrice définie par

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Cette matrice est appelée "*matrice de découplage*".

(2) Soit le vecteur  $\Delta_0(\mathbf{x})$  défini par

$$\Delta_0(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

**Théorème 3.1** (Isidori 1989) (1) *Le système (3.13)-(3.14) est découplable statiquement sur une sous-variété  $\Theta$  de  $\mathcal{R}^n$  si et seulement si*

$$\text{rang de } \Delta(\mathbf{x}) = m \quad \forall \mathbf{x} \in \Theta \quad (3.19)$$

(2) *Cette condition étant satisfaite, le retour d'état défini par:*

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{v} \quad (3.20)$$

avec

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\Delta(\mathbf{x})^{-1} \Delta_0(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x})^{-1} \quad (3.22)$$

*découple le système (3.13) sur  $\Theta$ .  $\mathbf{v}$  représente la nouvelle entrée du système.*

(3) De plus, le système bouclé  $(\mathbf{h}, \mathbf{f} + \mathbf{g}\alpha, \mathbf{g}\beta)$  possède un comportement entrées-sorties linéaire décrit par

$$y_i^r = v_i, \quad \forall i \in \underline{m} \quad (3.23)$$

La preuve de ce théorème se trouve en détail dans Isidori (1989).

### 3.4 Objectifs de la commande

Lors de l'exécution d'une tâche qui requiert un certain contact entre un robot manipulateur et son environnement, il est évident que la planification de trajectoires (positionnement) de l'effecteur n'est pas le seul soucis posé au concepteur, comme c'est le cas pour les manipulateurs sans contraintes. En effet, à cause de la nature des tâches imposées à cette catégorie de systèmes, la commande de la force de contact est aussi requise. Le concepteur est donc amené à concevoir un contrôleur qui assure simultanément:

- (1) un positionnement de l'effecteur
- (2) un contrôle de la force exercée par l'effecteur sur l'environnement des contraintes.

Le contrôle de l'amplitude de la force exercée permet spécifiquement:

- (1) que ni l'effecteur ni l'environnement ne soient endommagés par le contact,
- (2) que le contact soit maintenu tout au long de l'exécution de la tâche,
- (3) que la force requise soit appliquée précisément pour accomplir la tâche confiée au manipulateur.

D'une façon plus formelle, l'objectif de commande peut s'énoncer de la manière suivante: étant donnée une fonction de classe  $C^\infty$   $q_d: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^n$  dénotant le vecteur des positions généralisées désirées dans l'espace des articulations et une fonction de classe  $C^\infty$   $f_d: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^n$ , le vecteur des forces des contraintes généralisées désirées, trouver une fonction de commande  $u: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^n$  telle que l'on ait:  $q(t) \rightarrow q_d(t)$  et  $f(t) \rightarrow f_d(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Hypothèse 3.1** *On suppose que les trajectoires désirées de déplacement, incluant leurs premières et secondes dérivées, et celles des forces des contraintes sont connues. De telles trajectoires peuvent être déterminées par diverses méthodes connues. On suppose que ces trajectoires sont assez lisses (des fonctions de classe  $C^\infty$ ), i.e., les trajectoires des vitesses et des accélérations désirées sont ultimement bornées.*

**Hypothèse 3.2** *On suppose que si la condition des contraintes holonomes décrites par le système d'équations algébriques*

$$\Phi(q) = 0, \quad (q_1 = \Omega(q_2))$$

*est satisfaite, on aura*

$$\Phi(q_d) = 0, \quad (q_{1d} = \Omega(q_{2d})) \quad (3.24)$$

**Lemme 3.1** *Si une loi de commande  $u^* \in \mathcal{R}^n$  dans (2.88)-(2.89) est déterminée telle que*

$$x_2(t) \rightarrow x_{2d}(t) \text{ et } \lambda(t) \rightarrow \lambda_d(t) \quad (3.25)$$

*alors il existe une loi de commande unique  $u \in \mathcal{R}^n$  définie par*

$$u = T^{-T} (E_2^T x_2) u^* \quad (3.26)$$

*telles que*

$$q(t) \rightarrow q_d(t) \text{ et } f(t) \rightarrow f_d(t) \quad (3.27)$$

**Preuve:** en appliquant la transformation des coordonnées établies dans la section 2.4 aux coordonnées généralisées désirées, on aura:

$\mathbf{x}_{1d} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_{2d} = \mathbf{q}_{2d}$ , avec  $\mathbf{q}_d = \mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_{2d})$ . De plus, si  $\mathbf{f} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}$ , l'on a aussi  $\mathbf{f}_d = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_d$  telle que  $\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)\mathbf{u}^*$ .

Étant donnée que les matrices  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{Q}$  sont non-singulières, à toute loi de commande  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{R}^n$  et à tout couple de solutions  $(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\lambda})$  vérifiant (3.25) dans (2.87), leurs sont associées une loi de commande unique  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$  et un couple de solutions uniques  $(\mathbf{q}, \mathbf{f})$  vérifiant (3.27) dans (2.42).

□

### 3.5 Application de la commande linéarisante et découplante à un robot manipulateur avec contraintes holonomes

Dans cette section, en se basant sur les concepts présentées aux sections précédentes nous élaborons la commande d'un manipulateur robotique avec contraintes holonomes à l'aide de la technique linéarisante et découplante par retour de sorties.

**Remarque:** Un système est "nominal", si tous les paramètres dynamiques du système peuvent être exactement définis.

**Hypothèse 3.3** *On suppose que le système est nominal et que les états des positions, des vitesses et de la force des contraintes sont complètement mesurables.*

### 3.5.1 Représentation d'état de la dynamique du manipulateur avec contraintes

Dans le chapitre 2, nous avons élaboré la dynamique des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Une telle dynamique est décrite par l'ensemble des équations algébro-différentielles suivantes

$$\mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2)\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{12}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_1^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_1^* + \mathbf{J}_1^T(\mathbf{x}_2)\lambda \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2)\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}_2^* \quad (3.29)$$

L'ensemble des équations différentielles ordinaires (3.28) caractérise la dynamique du mouvement du manipulateur sur la variété des contraintes. L'ensemble des équations algébriques (3.29), caractérise le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux forces des contraintes. Choisissons le vecteur des positions généralisées, le vecteur des vitesses généralisées  $\dot{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$  et l'intégrale du vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\int \lambda dt \in \mathcal{R}^m$  comme les variables d'état du système. Choisissons le vecteur des positions généralisées  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^{n-m}$  et les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathcal{R}^m$  comme les sorties du système. Le modèle d'état du système peut être formulé par

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \int \lambda dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3.31)$$

et qui peut être mis sous la forme générale

$$\dot{\xi} = \mathbf{f}(\xi_2, t) + \mathbf{g}(\xi_2, t)\mathbf{u} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\xi_2, t) + \mathbf{k}(\xi_2, t)\mathbf{u} \quad (3.33)$$

avec

$$\mathbf{f}(\xi_2, t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}(\xi_2, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_x(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}(\xi_2, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k}(\xi_2, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix};$$

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 & \dot{\mathbf{x}}_2 & \int \lambda dt \end{bmatrix}^T \text{ et } \xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 & \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix}^T$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) &= \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) \left[ \left( \mathbf{C}_{12}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) - \mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \right) \dot{\mathbf{x}}_2 \right] \\ &\quad + \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) \left[ \mathbf{G}_1^*(\mathbf{x}_2) - \mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) \right] \\ \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) &= \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \left[ -\mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \dot{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) \right] \\ \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) \left[ \mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) - \mathbf{T}_1^T(\mathbf{x}_2) \right] \\ \mathbf{E}_x(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{E}_2 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{T}_1^T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1 \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

### 3.5.2 Commande linéarisante et découplante

**Lemme 3.2** *Le système robotique avec contraintes holonomes décrit par les équations algébro-différentielles (3.28)-(3.29), est complètement linéarisable-découplable au sens entrées-sorties.*

**Preuve:** La linéarisation par retour de sorties du système est obtenue par le Théorème 1, par dérivation des sorties  $y_i$  jusqu'à ce que les entrées de commande apparaissent. La sortie relative aux vecteurs des multiplicateurs de Lagrange est directement dépendante de vecteur  $\mathbf{u}$ , ce qui ne nécessite pas sa dérivation. Par contre en dérivant deux fois les états de position, on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{E}_\mathbf{x}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \mathbf{u} . \quad (3.34)$$

Pour que le système soit linéarisable au sens entrées-sorties, il suffit que la matrice de découplage caractérisée par

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{E}_\mathbf{x}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$$

soit non-singulière.

La matrice  $\Delta(\mathbf{x})$  est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2)(-\mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) - \mathbf{T}_1^T(\mathbf{x}_2)) \\ \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) & \mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \\ 0 & \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{T}_2^T(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ainsi

$$\Delta(\mathbf{x})^{-1} = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J}_1^T(\mathbf{x}_2) & \mathbf{M}_{12}^*(\mathbf{x}_2) \\ 0 & \mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_1^T(\mathbf{x}_2)$  et  $\mathbf{M}_{22}^*(\mathbf{x}_2)$  étant nécessairement non-singulières,  $\Delta(\mathbf{x})$  est donc non-singulière.

□

La loi de commande linéarisante et découplante peut s'écrire selon (3.20), comme

$$\mathbf{u} = \Delta(\mathbf{x})^{-1} \begin{bmatrix} \nu_\lambda - \mathbf{F}_\lambda(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \\ \nu_{\ddot{\mathbf{x}}_2} - \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$



où  $\nu_\lambda$  et  $\nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2}$  caractérisent les nouvelles entrées du système qui peuvent être choisies par les méthodes classiques de la commande linéaire. Cette loi de commande peut, maintenant, s'exprimer en fonction des caractéristiques du manipulateur de la manière

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2) & \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_\lambda \\ \nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2} \end{bmatrix} + \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)^{-1} [\mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2)] \quad (3.36)$$

ou encore

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)^{-1} \left[ -\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2) \nu_\lambda + \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T \nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) \right]. \quad (3.37)$$

Puisque  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_2)$  est non-singulière, pour tout  $(t, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^{n-m}$  la commande  $\mathbf{u}$  est donc partout définie. Selon (3.23), le système en boucle fermée est régi par les relations suivantes:

$$\lambda = \nu_\lambda \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{x}}_2 = \nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2} \quad (3.38)$$

Le choix de  $\nu_\lambda$  et  $\nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2}$  dépend de l'approche adoptée pour contrôler le système linéarisé (3.38)-(3.39). Si on adopte la technique de placement des pôles comme approche de contrôle,  $\nu_\lambda$  et  $\nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2}$  peuvent être choisies selon

$$\nu_{\tilde{\mathbf{x}}_2} = \ddot{\mathbf{x}}_{2d} - \mathbf{K}_2 \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 - \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (3.39)$$

$$\text{et} \quad \nu_\lambda = \lambda_d \quad (3.40)$$

avec  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2d}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{2d}$  représentant respectivement l'erreur du vecteur des positions généralisées et l'erreur du vecteur de vitesses généralisées,  $\mathbf{K}_1 \in \mathcal{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  et  $\mathbf{K}_2 \in \mathcal{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  sont deux matrices diagonales variables.  $\mathbf{x}_{2d}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{2d}$  et  $\ddot{\mathbf{x}}_{2d}$  représentent respectivement les vecteurs des positions, vitesses et accélérations désirées du système sur la variété des contraintes  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 3.2** *Considérons un manipulateur robotique dont la dynamique est décrite par (3.28)-(3.29), sous l'Hypothèse 3.3, la loi de commande (3.36) stabilise exponentiellement le système si les matrices  $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  et  $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  dans (3.39) sont définies positives. Ainsi, on a  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_{2d}$  et  $\lambda \rightarrow \lambda_d$  quand le temps tend vers l'infini.*

**Preuve:** La preuve de ce théorème est directe et peut être obtenue en remplaçant les expressions de  $v_{\dot{\lambda}}$  et  $v_{\dot{\mathbf{x}}_2}$  dans (3.37). Le système en boucle fermée est donc caractérisé par

$$\ddot{\mathbf{x}}_{2d} + \mathbf{K}_2 \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_2 = 0 \quad (3.41)$$

et 
$$\ddot{\lambda} = 0 \quad (3.42)$$

Le système (3.28)-(3.29) est exponentiellement stable si, et seulement si,  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  sont définies positives.

□

Les matrices  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  définissent la dynamique du système en chaîne fermée.

**Remarque:** Il est clair que sous l'hypothèse 3.3, le retour de la force n'est pas requis pour assurer la convergence des erreurs de position et de la force du système.

### 3.6 Application à un manipulateur robotique à deux degrés de liberté

Dans cette section, nous appliquons la loi de commande développée à la section 3.4 sur un robot manipulateur à deux degrés de libertés en présence de contraintes holonomes sur le mouvement de l'effecteur.

### 3.6.1 Manipulateur robotique à deux degrés de liberté avec contraintes

L'exemple que nous considérons pour la validation des approches de commande étudiées est un manipulateur robotique à deux degrés de liberté. Le robot est supposé dans un plan vertical. Le modèle du système étant donné par (Su et *al.* 1992)

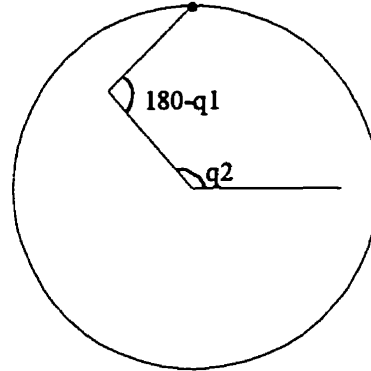


Figure 3.2 Manipulateur à deux degrés de liberté

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.43)$$

avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} b & b + c \cos(q_1) \\ b + c \cos(q_1) & a + b + 2c \cos(q_1) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & c\dot{q}_1 \sin(q_1) \\ -c(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1) & -c\dot{q}_1 \sin(q_1) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} cd \cos(q_1 + q_2) \\ ad \cos(q_1) + cd \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

où

$$a = (m_1 + m_2)l_1^2; \quad b = m_2 l_2^2; \quad c = m_2 l_1 l_2; \quad d = \frac{g}{l_1}$$

$m_1, m_2, l_1$  et  $l_2$  sont les masses et longueurs respectives de la première et seconde membrure du manipulateur.  $g$  est l'accélération de la gravité du pesanteur de valeur  $9.8ms^{-2}$ .

La matrice de cinématique directe est donnée par

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_2) + l_1 \cos(q_1 + q_2) \\ l_2 \sin(q_2) + l_1 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

### 3.6.2 Équation des contraintes

Dans l'espace de la tâche, l'équation des contraintes dans le plan x-y est supposée être un cercle de rayon  $r$  et dont le centre coïncide avec l'axe de rotation de la première membrure. Cette équation peut être mathématiquement exprimée par l'équation

$$\phi(\mathbf{p}) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{p} = (x, y)$ .

La transformation de l'équation des contraintes de l'espace de travail vers l'espace des articulations donne l'expression de  $\Phi(\mathbf{q})$  suivante

$$\Phi(\mathbf{q}) = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_1) - r^2 = 0 \quad (3.49)$$

cette équation possède deux solution possibles

$$q_{10} = \Omega(q_2) = \Omega(x_2) = \pm \cos^{-1} \left( \frac{r^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1 l_2} \right) \quad (3.50)$$

La Jacobienne de  $\Phi(\mathbf{q})$  est donné par

$$J^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2l_1 l_2 \sin(q_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

### 3.6.3 Modèle dynamique transformé

En appliquant la transformation des coordonnées dans l'équation dynamique du système, nous obtenons le modèle dynamique suivant

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\lambda} \quad (3.51)$$

avec 
$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} b & b + c \cos(q_{10}) \\ b + c \cos(q_{10}) & a + b + 2c \cos(q_{10}) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \begin{bmatrix} 0 & c \dot{x}_2 \sin(q_{10}) \\ -c \dot{x}_2 \sin(q_{10}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} cd \cos(q_{10} + x_2) \\ ad \cos(q_{10}) + cd \cos(q_{10} + q_2) \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{E}_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}).$$

Donc, la dynamique réduite du système, peut être écrite comme:

$$(a + b + 2c \cos(q_{10})) \ddot{x}_2 + ad \cos(q_{10}) + cd \cos(x_2 + q_{10}) = u_1 - 2l_1 l_2 \sin(q_{10}) \lambda \quad (3.55)$$

$$(b + c \cos(q_{10})) \ddot{x}_2 + c \sin(q_{10}) \dot{x}_2^2 + cd \cos(x_2 + q_{10}) = u_2 \quad (3.56)$$

### 3.6.4 Trajectoires désirées

Nous allons considérer deux classes de trajectoires désirées. La première classe concerne celles appartenant au sous-espace défini par

$$\Sigma_d = \left\{ (q_d, \dot{q}_d, f_d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 / \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_d = 0 \right\}$$

et on choisira

$$x_{2d}(t) = q_{2d}(t) = (-1.57 + 0.9(1 - \cos 1.26t)) \text{ rad} \quad \text{quand } t < 2.5 \text{ sec}$$

$$x_{2d}(t) = 0.26 \text{ rad} \quad \text{quand } t \geq 2.5 \text{ sec}$$

Les forces des contraintes désirées sont définies par

$$f_d = \begin{bmatrix} -2l_1 l_2 \sin(q_{10}) \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_d$$

Si  $f'_d$  représente le vecteur des forces de contraintes dans l'espace de configuration, ce dernier est perpendiculaire à la surface et constant si  $\lambda_d$  est constant. Il est donné par:

$$f'_d = \begin{bmatrix} f_{dx} \\ f_{dy} \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \phi(p)}{\partial p} \right)^T \lambda_d = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \lambda_d = 2H(q) \lambda_d$$

L'intensité de cette force est donnée par  $\|f'_d\| = 2(l_1^2 + l_2^2)^{1/2} \lambda_d = \sqrt{2} \lambda_d$

On choisira  $\lambda_d = 10 \text{ N/m}$ .

La deuxième classe concerne des trajectoires périodiques, on choisira

$$x_{2d}(t) = -1.57(1 - \cos(1.26t)) \text{ rad} \quad \text{et} \quad \lambda_d(t) = (10 - 9 \cos(1.26t)).$$

### 3.6.5 Résultats de simulation

On suppose que les valeurs des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement 0.8, 0.4, 0.32. On choisit  $K_1=15$ ,  $K_2=6$  et  $K_\lambda=0$ . Dans un premier temps, on considère les trajectoires désirées appartenant à  $\Sigma_d$ . La figure 3.3 représente la trajectoire de la deuxième membrure  $q_2(t)$  ainsi que la trajectoire désirée  $q_{2d}(t)$ . La figure 3.4 représente la trajectoire de l'erreur relative à la poursuite de la trajectoire. Il est clair que les erreurs de poursuite convergent vers zéro et la stabilité exponentielle est assurée. La dynamique de l'erreur de poursuite est fonction du choix des matrices des gains  $K_1$  et  $K_2$ .

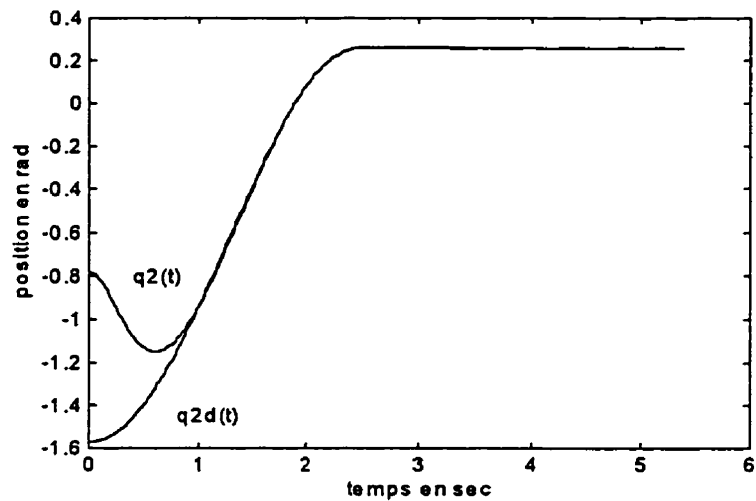


Figure 3.3 Trajectoires de poursuite de l'articulation 2

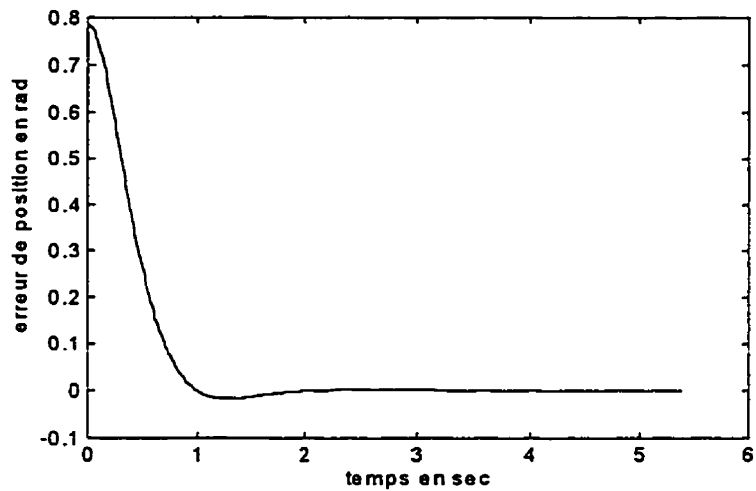


Figure 3.4 Erreur de poursuite de mouvement de l'articulation 2

Les figures 3.5 et 3.6 représentent respectivement la force des contraintes appliquée sur la surface des contraintes et l'erreur relative. Dans la figure de l'erreur, nous avons modifié l'échelle pour mieux voir le régime dynamique de l'erreur et vérifier sa convergence vers zéro.

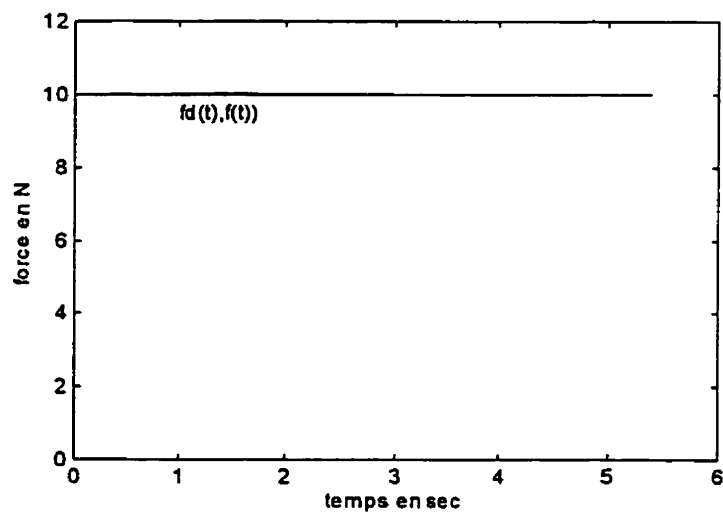


Figure 3.5 Force appliquée sur la surface des contraintes

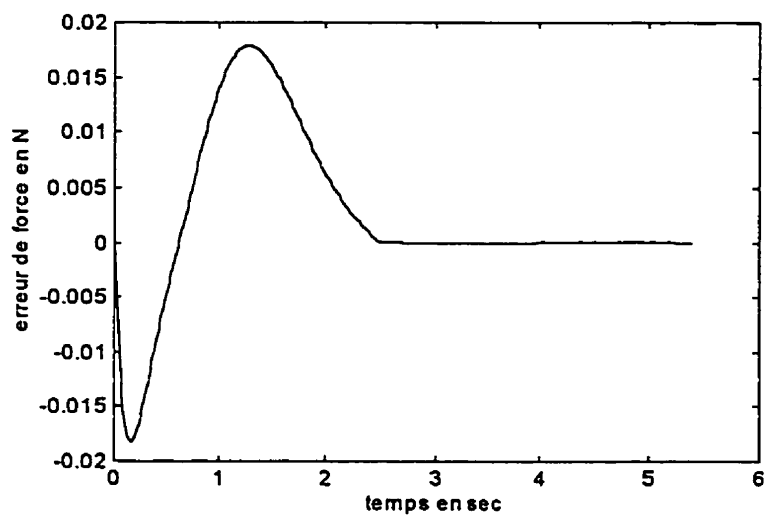


Figure 3.6 Erreur relative à la force des contraintes

La figure 3.7 représente l'effort de la commande appliquée à chacune des articulations.



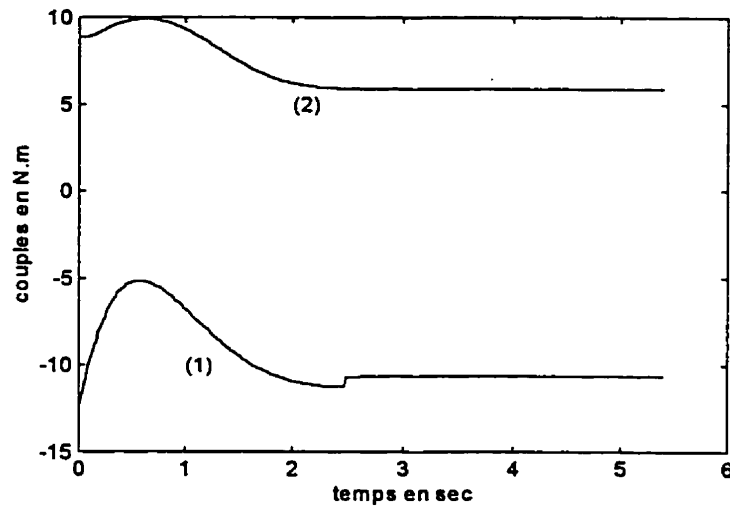


Figure 3.7 Effort des couples appliqués aux articulations 1 et 2

Considérons maintenant le cas où les trajectoires désirées n'appartenant pas à  $\Omega_d$ . La figure 3.8 représente la trajectoire de la deuxième membrure  $q_2(t)$  ainsi que la trajectoire désirée  $q_{2d}(t)$ .

La figure 3.9 représente la trajectoire de l'erreur de poursuite. La figure 3.8 représente l'erreur de poursuite de la trajectoire. En régime permanent l'erreur de poursuite de la trajectoire est nulle, et la stabilité exponentielle du système réduit est assurée.

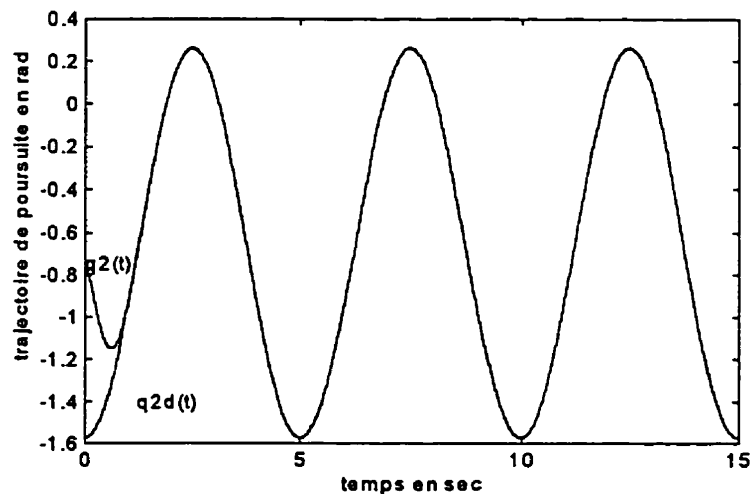


Figure 3.8 trajectoires de poursuite de l'articulation 2

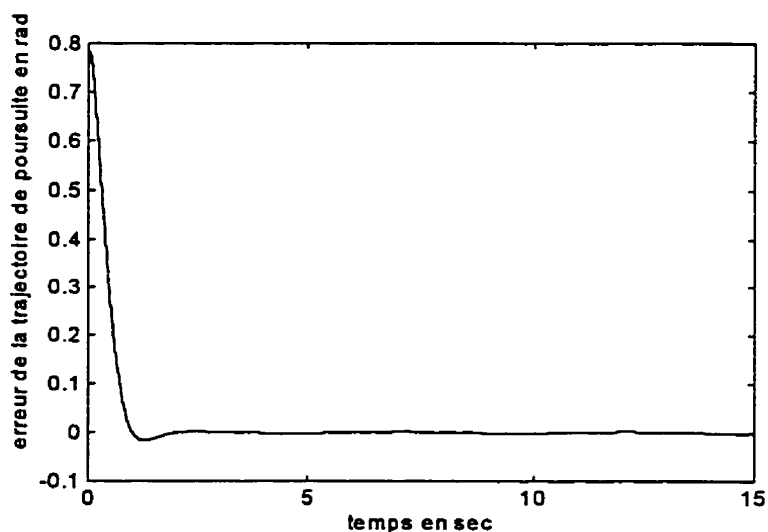


Figure 3.9 Erreur de poursuite de mouvement de l'articulation 2

Les figures 3.10 et 3.11 représentent respectivement la force des contraintes appliquée sur la surface des contraintes et l'erreur relative. En régime permanent cette erreur est nulle.

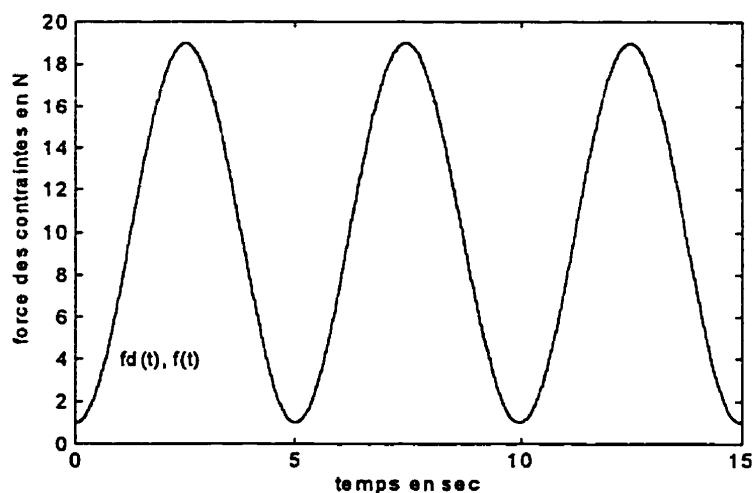


Figure 3.10 Forces appliquée sur la surface des contraintes

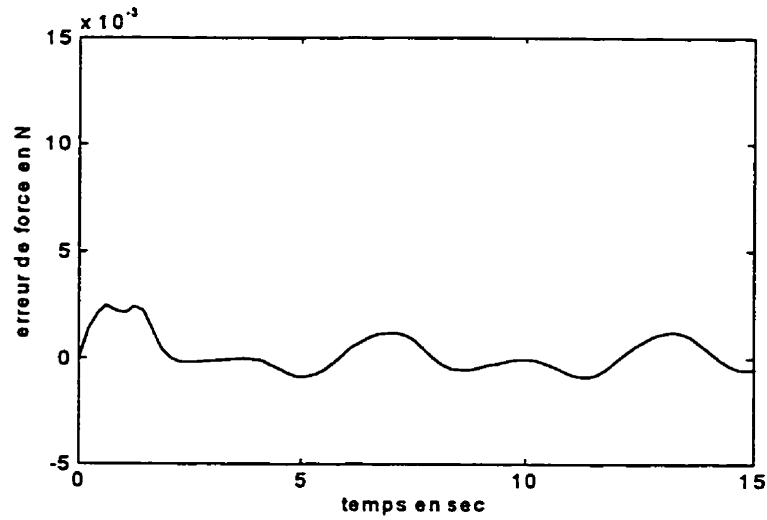


Figure 3.11 Erreur relative à la force des contraintes

La figure 3.12 représente l'effort de la commande appliquée à chacune des articulations.

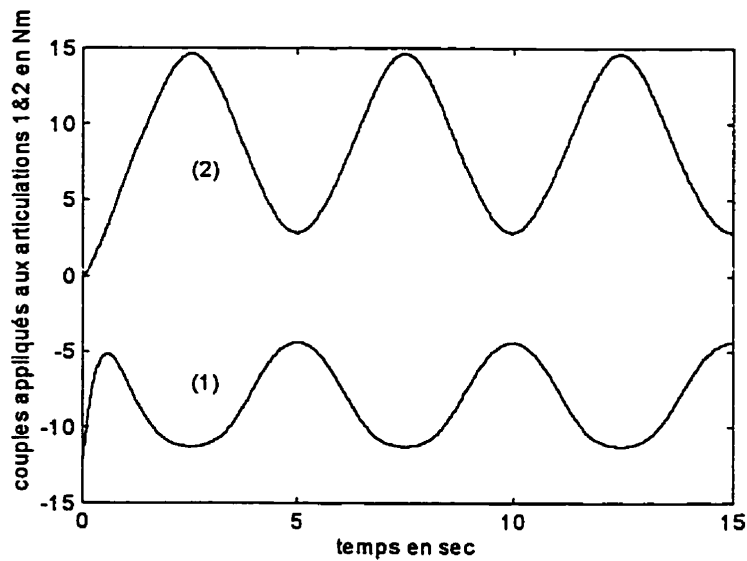


Figure 3.12 Effort des couples appliqués aux articulations 1 et 2.

Le problème relatif à la loi de commande (3.37), est qu'elle ne peut pas garder les mêmes performances du système avec un système dont le modèle comporte des incertitudes de son modèle. Supposons maintenant que les paramètres du système varient. On suppose

que les valeurs estimées des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont respectivement 1, 0.5, 0.5. Les figures 3.13 et 3.14 représentent les erreurs relatives aux déplacements et à la force des contraintes du système.

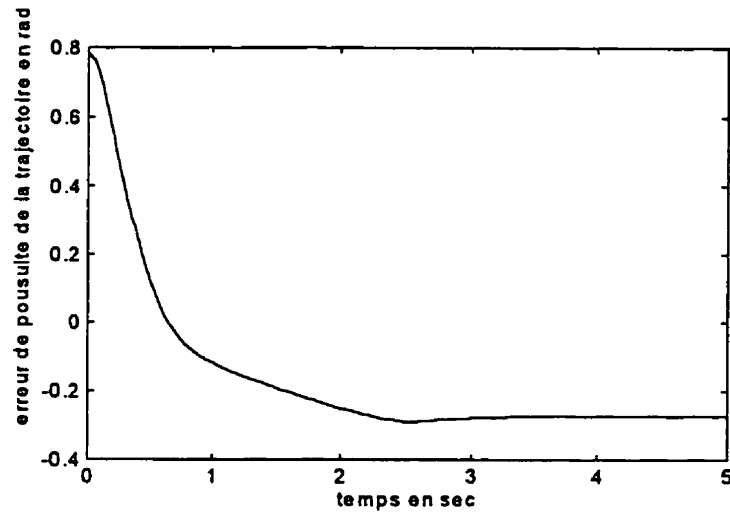


Figure 3.13 Erreur de poursuite du mouvement de l'articulation 2

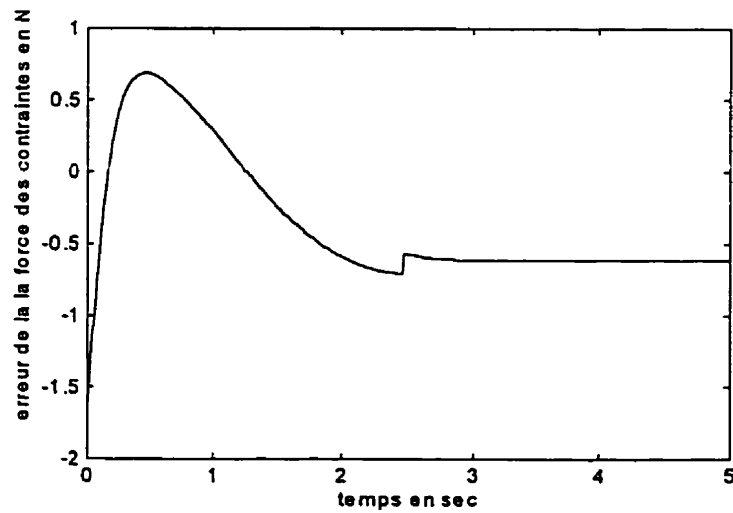


Figure 3.14 Erreur relative à la force des contraintes

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'application de la commande linéarisante par retour d'état à un robot manipulateur avec contraintes holonomes. En utilisant la technique de la géométrie différentielle, nous avons démontré que les systèmes robotiques avec contraintes holonomes sont linéarisables et découplables au sens entrées-sorties. Nous avons établi une commande utilisant la technique de placement de pôles au système linéarisé. Cette loi de commande ressemble à celle élaborée par Mc-Clamroch et Wang (1988) ainsi qu'à celle de Raibert et Craig (1981). Cependant, la loi élaborée dans ce chapitre, présente un aspect plus formel et garantit une stabilité globale au système. Nous avons appliqué la méthode de placements de pôles comme technique de commande du système linéarisé. Lorsque les paramètres du système sont bien connus, la convergence exponentielle des erreurs est garantie. Cependant, si les paramètres du système varient, la technique présentée dans ce chapitre présente un inconvénient quant à la convergence des erreurs de poursuite et affecte ainsi la robustesse du système. Les prochains chapitres seront dédiés à l'étude de la commande et à la stabilisation robuste des systèmes robotiques avec contraintes holonomes en présence d'incertitudes affectant le modèle du système.

## **CHAPITRE 4**

### **STABILISATION ROBUSTE DE LA COMMANDE LINÉARISANTE ET DÉCOUPLANTE**

#### **4.1 Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une commande linéarisante et découplante par retour de sortie du robot manipulateur avec contraintes holonomes. La stabilité exponentielle ainsi que la convergence des erreurs ont été montrées pour le cas du système nominal (c'est à dire lorsque le système est considéré certain). Ces performances se détériorent dans le cas où le système présente des incertitudes dans son modèle. Ces incertitudes peuvent être dues à la variation des paramètres du manipulateur, à des perturbations externes ou à certaines dynamiques non modélisées. Pour remédier à ce problème, nous adjoindrons une boucle de robustesse à la commande linéarisante et découplante établie au chapitre 3. Basé sur un retour d'état continu, ce nouvel élément garantit une stabilisation robuste du modèle incertain du manipulateur robotique avec contraintes holonomes. Dans la section 4.2, nous analysons la robustesse du système avec la technique de commande linéarisante et découplante. La section 4.3 traite de la stabilisation robuste de la commande par l'adjonction d'une boucle de retour d'état continu à la commande linéarisante et découplante. La section 4.4 est consacré à un exemple d'application sur un robot manipulateur a deux degrés de liberté.

## 4.2 Analyse de robustesse de la commande linéarisante

En général, pour analyser la robustesse d'un système incertain, on est amené à introduire les termes incertains dans la dynamique du système et ensuite étudier la stabilité et la convergence du système en présence de ces incertitudes. Trois catégories d'incertitudes peuvent être considérées. La première catégorie regroupe les incertitudes dues à la variation des paramètres du système par rapport aux paramètres nominaux. La deuxième catégorie regroupe les couples de perturbations extérieurs statiques qui peuvent affecter le système. La troisième catégorie regroupe les perturbations dues aux dynamiques non modélisées du système. Dans ce qui suit, nous considérons l'effet des deux premières catégories.

### 4.2.1 Modèle d'état du système incertain sous la commande linéarisante et découplante

Nous supposons dans cette section que la dynamique du robot manipulateur est incertaine et elle est décrite par:

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_0(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{M}(\mathbf{q}))\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G}_0(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{G}(\mathbf{q})) = \mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} \\ \Phi(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'indice "0" est utilisé pour désigner les valeurs nominales des matrices et vecteurs des paramètres du manipulateur.  $\Delta\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\Delta\mathbf{C}(\mathbf{q})$  et  $\Delta\mathbf{G}(\mathbf{q})$  représentent respectivement les quantités incertaines respectives de  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$  et  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  et  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  représente un vecteur des couples de perturbations externes agissant sur le système.

**Hypothèse 4.1** On suppose que les incertitudes du système sont bornées, de façon que

$$\|\Delta \mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq \varphi_1(\mathbf{q}, t) \quad (4.2)$$

$$\|\Delta \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq \varphi_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (4.3)$$

$$\|\Delta \mathbf{G}(\mathbf{q})\| \leq \varphi_3(\mathbf{q}, t) \quad (4.4)$$

$$\|\mathbf{d}\| \leq \rho \quad (4.5)$$

Sans perte de généralités, nous considérons que la norme utilisée est définie dans l'espace  $\mathcal{L}^2$ . Ainsi  $\|\mathbf{f}(\cdot)\| = \sqrt{\max \lambda_i(\mathbf{f}^T \mathbf{f})}$ , où  $\max \lambda_i(\cdot)$  dénote la valeur propre maximale de  $(\cdot)$ .  $\varphi_i$  sont supposées des fonctions scalaires continues,  $\rho$  est un scalaire.

Appliquons la transformation de coordonnées (2.72) à la dynamique incertaine, nous obtenons l'équation de la dynamique, en fonction des coordonnées  $\mathbf{x}_2$ , suivante

$$(\mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2) + \Delta \mathbf{M}(\mathbf{x}_2))\ddot{\mathbf{x}}_2 + (\mathbf{C}_0(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) + \Delta \mathbf{C}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2))\dot{\mathbf{x}}_2 + (\mathbf{G}_0(\mathbf{x}_2) + \Delta \mathbf{G}(\mathbf{x}_2)) = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{u} + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d}^*$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \Delta \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \\ \Delta \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) [\Delta \mathbf{M}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) + \Delta \mathbf{C}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2, \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{T}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)] \\ \Delta \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \Delta \mathbf{G}(\mathbf{Q}(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2)) \\ \mathbf{d}^* &= \mathbf{T}^T(\mathbf{E}_2^T \mathbf{x}_2) \mathbf{d} \end{aligned}$$

Selon l'hypothèse 4.1 et la nature de la transformation (2.72), nous pouvons déduire que:

$$\|\Delta \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\| \leq \varphi_1(\mathbf{x}_2, t) \quad (4.6)$$

$$\|\Delta \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\| \leq \varphi_2(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, t) \quad (4.7)$$

$$\|\Delta \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2)\| \leq \varphi_3(\mathbf{x}_2, t) \quad (4.8)$$

$$\|\mathbf{d}^*\| \leq \rho^*. \quad (4.9)$$



Rassemblons tous les éléments incertains dans un même terme,

$$\mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_0^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_0^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)\lambda + (\mathbf{p}^* - \Delta\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2))$$

et dénotant

$$\delta^* = (\mathbf{d}^* - \Delta\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta\mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2)) \quad (4.10)$$

$\delta^* \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur des termes incertains du système.

La dynamique du système sera donc représentée par l'équation suivante

$$\mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_0^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}_0^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{u} + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)\lambda + \delta^*. \quad (4.11)$$

Selon (4.6)-(4.10) le vecteur global des termes incertains  $\delta^*$  est toujours borné par une certaine fonction connue  $\pi(\cdot)$  qui dépend des variables de mouvement du système telle que,

$$\|\delta^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, t)\| \leq \pi(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, t). \quad (4.12)$$

La dynamique réduite incertaine peut être obtenue par l'application de la partition de la matrice identité, et elle est décrite par

$$\mathbf{E}_1\mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{C}_0^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_1\mathbf{G}_0^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_1\mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{u} + \mathbf{J}_1^T(\mathbf{x}_2)\lambda + \delta_1^* \quad (4.13)$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2\mathbf{C}_0^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{E}_2\mathbf{G}_0^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2\mathbf{T}^T(\mathbf{x}_2)\mathbf{u} + \delta_2^* \quad (4.14)$$

vérifiant

$$\|\delta_1^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2)\| \leq \pi(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2) \text{ et } \|\delta_2^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2)\| \leq \pi(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2). \quad (4.15)$$

avec  $\delta_1^* = \mathbf{E}_1\delta^*$  et  $\delta_2^* = \mathbf{E}_2\delta^*$

Tenant compte de (3.33), et définissant les variables d'état de la dynamique de l'erreur comme

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \\ \int \bar{\lambda} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

avec  $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2d} \in \mathcal{R}^{n-m}$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_{2d} \in \mathcal{R}^{n-m}$  dénotant respectivement les vecteurs des erreurs de position et de vitesse des articulations dans les coordonnées généralisées  $\mathbf{x}_2$ . Le vecteur d'erreur de la force des contraintes est représenté par  $\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_d \in \mathcal{R}^m$ .

Ainsi la dynamique du système en chaîne fermée avec la commande linéarisante et découplante (3.37), sera

$$\dot{\bar{\xi}}(t) = \mathbf{A}(\bar{\xi}_2, t)\bar{\xi}(t) + \mathbf{B}(\bar{\xi}_2, t)\delta^e \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ -(\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2))^{-1} \mathbf{K}_1 & -(\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2))^{-1} \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}; \quad (4.18)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ (\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2))^{-1} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & -\mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

et

$$\bar{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix};$$

avec  $\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_2^T \mathbf{M}_0^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2$ .

#### 4.2.2 Convergence de la force des contraintes

Selon le modèle d'état du système en chaîne fermée avec la commande linéarisante et découplante, l'erreur en force du système est donnée par

$$\tilde{\lambda} = -\mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2)\delta_1^* \quad (4.20)$$

Une action intégrale peut être ajoutée à la commande de la force, telle que l'expression de  $\nu_\lambda$  dans (3.40) devienne

$$\nu_\lambda = \lambda_d - \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{K}_\lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice carrée diagonale définie positive. Ainsi le modèle d'état du système en chaîne fermée sera donnée par (4.17), avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{I}_{(n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ -(\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2))^{-1} \mathbf{K}_1 & -(\mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2))^{-1} \mathbf{K}_2 & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & -\mathbf{K}_\lambda \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

et la dynamique de l'erreur de force par

$$\tilde{\lambda} + \int \tilde{\lambda} dt = -\mathbf{J}_1^{*-T}(\mathbf{x}_2)\delta_1^* \quad (4.23)$$

**Proposition 4.1** *L'erreur de la force des contraintes est, au pire des cas, uniformément borné par la loi de commande (3.37).*

**Preuve:** Selon l'expression de la dynamique de l'erreur de la force (4.23), on peut distinguer les deux cas suivants:

(1) Si les trajectoires désirées appartiennent à la variété définie par

$$\Sigma_d = \{(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \mathbf{f}_d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}\} \quad (4.24)$$

donc  $\tilde{\lambda}_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .  $K_\lambda$  détermine la dynamique de convergence de la force.

(2) Si les trajectoires désirées n'appartiennent pas à  $\Sigma_d$ , donc

$$\|\tilde{\lambda}_{t \rightarrow \infty}\| < \varepsilon(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2) \|\mathbf{I}_m + \mathbf{K}_\lambda\|^{-1} \quad (4.25)$$

Plus grand est  $\|\mathbf{K}_\lambda\|$ , plus faible est  $\|\tilde{\lambda}\|$ .

Selon la Proposition 4.2, l'étude de la robustesse sera donc requise uniquement pour la dynamique réduite du système.

#### 4.2.3 Modèle incertain de la dynamique réduite

Considérons comme variables d'état le vecteur des positions généralisés et celui des vitesses généralisées, c'est à dire:

$$\tilde{\xi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

et dénotant

$$\omega^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = (-\Delta \mathbf{C}_{22}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_2 - \Delta \mathbf{G}_2^*(\mathbf{x}_2) + \mathbf{p}^*) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{M}_{22}^{*-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{M}_{220}^*(\mathbf{x}_2) - \mathbf{I} \quad (4.28)$$

résultant en

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = \nu_{\ddot{\mathbf{x}}_2} + \sigma_1(\nu_{\ddot{\mathbf{x}}_2}, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \quad (4.29)$$

avec

$$\sigma_1 = \mathbf{Q}^* \nu_{\ddot{\mathbf{x}}_2} + \mathbf{M}_{22}^{*-1} \omega^* \quad (4.40)$$

Le modèle d'état de la dynamique de l'erreur du système réduit sera ainsi donnée par

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2(t) + \mathbf{B}_2 \bar{\sigma} \quad (4.31)$$

où

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{I}_{(n-m)} \\ -\mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ \mathbf{I}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\bar{\sigma} = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{x}}_{2d} - \mathbf{K}_2 \bar{\xi}_2) + \mathbf{M}_{22}^{-1} \omega^* \quad (4.33)$$

et

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]. \quad (3.34)$$

#### 4.2.4 Caractéristiques du modèle incertain

**Propriété 4.1** *Selon la structure du modèle d'état du système, les perturbations représentées par  $\bar{\sigma}$  obéissent à la condition de reproductibilité "matching condition".*

**Propriété 4.2** *Selon la définition de  $\mathbf{K}_1$  et de  $\mathbf{K}_2$ , les valeurs propres de  $\mathbf{A}_2$  étant strictement négatives, donc  $\mathbf{A}_2$  est une matrice de stabilité pour le système (4.31). Le point d'équilibre du système nominal caractérisé par  $\bar{\xi}_2 = \mathbf{0}$  est donc exponentiellement stable.*

**Propriété 4.3** *Selon la propriété 4.2, il existe une matrice définie positive  $\mathbf{P}$  qui satisfait l'équation de Lyapunov*

$$V(\bar{\xi}_2) = \bar{\xi}_2^T \mathbf{P} \bar{\xi}_2 \quad (4.35)$$

où  $\mathbf{P}$  est la solution unique de

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (4.36)$$

$\mathbf{Q}$  est une matrice définie positive.

**Propriété 4.4** *Le point d'équilibre  $\tilde{\xi}_2 = 0$  du système nominal*

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = A_2 \tilde{\xi}_2(t) \quad (4.37)$$

*est exponentiellement stable.*

#### 4.2.5 Condition de robustesse de la commande linéarisante et découplante

Il est bien connu que l'un des défauts majeurs de la commande linéarisante et découplante est son incapacité de maintenir les caractéristiques du système en chaîne fermée quand des incertitudes apparaissent dans le système. Cette commande maintient les caractéristiques de stabilisation robuste uniquement dans le cas énoncé par la proposition suivante. Pour analyser la stabilité du système incertain, nous utilisons la théorie de Lyapunov.

Rappelons que si  $\mathbf{x} = 0$  est un point d'équilibre pour le système

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

et que  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ , est une fonction continûment dérivable au voisinage,  $D$ , de  $\mathbf{x} = 0$ , telle que  $V(0) = 0$  et  $V(\mathbf{x}) > 0$  dans  $D - \{0\}$  et  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  dans  $D$ , donc  $\mathbf{x} = 0$  est stable. De plus, si  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  dans  $D - \{0\}$  donc  $\mathbf{x} = 0$  est asymptotiquement stable (Khalil 1991).

**Proposition 4.2** *Pour le système incertain décrit par l'équation (4.31) vérifiant l'existence d'un  $r > 0$ , pour tout  $\gamma > 0$  et telle que*

$$\|\sigma_1\| < \gamma \|\tilde{\xi}_2\| \quad \forall \|\tilde{\xi}_2\| < r, \quad (4.38)$$

*la loi de commande (3.37) stabilise asymptotiquement l'origine si*

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}. \quad (4.39)$$

**Preuve:** La dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov de (4.35) peut être écrite

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2) = \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2 \quad (4.40)$$

en tenant compte de (4.31) cette dérivée devient

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\xi}_2) &= -\tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + 2\tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \bar{\sigma}_1 \\ &= -\tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + 2\|\mathbf{P}\| \|\tilde{\xi}_2\| \|\bar{\sigma}_1\| \end{aligned}$$

mais comme 
$$\tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad (4.41)$$

où  $\lambda_{\min}(\cdot)$  désigne le minimum des valeurs propres de  $(\cdot)$ . Ainsi, si

$$\|\bar{\sigma}_1\| < \gamma \|\tilde{\xi}_2\|, \quad (4.42)$$

la dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système perturbé satisfait la relation suivante

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) \leq -[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + 2\lambda_{\max}(\mathbf{P})\gamma] \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad \forall \|\tilde{\xi}_2\| < r \quad (4.43)$$

avec  $\lambda_{\max}(\cdot)$  désigne le maximum des valeurs propres de  $(\cdot)$ .

Ainsi, en choisissant

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})},$$

la fonction dérivée de Lyapunov est ainsi définie négative, et l'origine sera donc asymptotiquement stable.

□

La commande linéarisante et découplante (3.37) stabilise robustement le système incertain (4.13)-(4.14), quand les incertitudes du système satisfont la condition (4.39), mais cette condition est trop restrictive et ne peut tenir compte des perturbations externes. Il est donc nécessaire de développer d'autres techniques pour assurer la stabilisation robuste du système.

### 4.3 Stabilisation robuste du système dynamique incertain

Le problème de conception des lois de commande robustes pour les systèmes non-linéaires incertains a attiré, ces dernières années, l'intérêt des automaticiens. Ainsi, si l'information concernant la grandeur de l'incertitude est disponible, on peut utiliser une commande par retour d'état pour accomplir les performances robustes du système incertain. Dans cette section, nous étudions une technique pour la stabilisation robuste du système incertain (4.31), afin d'assurer la convergence des erreurs et la stabilité asymptotique du système incertain. Les techniques présentées font appel à un retour d'état des variables mesurées du système.

#### 4.3.1 Position du problème

Le problème de stabilisation robuste du système incertain (4.17), peut s'énoncer de la manière suivante. Considérons le système dynamique,

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2(t) + \mathbf{B}_2 \sigma_1 \quad (4.44)$$

avec  $\sigma_1$  représentant le vecteur des incertitudes donné par (4.33), et posons

$$v_{\tilde{x}_2} = \tilde{x}_{2d} - \mathbf{K}_2 \dot{\tilde{x}}_2 - \mathbf{K}_1 \tilde{x}_2 + \Delta u. \quad (4.45)$$

Le but, ici, est de concevoir la composante additionnelle  $\Delta u$  qui permet de contrer les effets des perturbations du système caractérisées par  $\sigma_1$ . Dans le cas idéal où  $\sigma_1 = 0$ ,  $\Delta u$  doit être nulle. L'adjonction de  $\Delta u$ , au système mène à la forme d'état suivante

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2(t) + \mathbf{B}_2(\bar{\sigma}_1 + \Delta u) \quad (4.46)$$

avec

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma} + \mathbf{Q}' \Delta u \quad (4.47)$$



**Hypothèse 4.2**  $\bar{\sigma}_1$  est supposée être continue et bornée par une fonction connue; en particulier, il existe une fonction non-négative continue de Lebesgue  $\mu(\cdot)$ , telle que, pour tout  $(\mathbf{x}_2, t) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}$ ,

$$\|\bar{\sigma}_1\| < \mu(\tilde{\xi}_2, t) \quad (4.48)$$

De même, on suppose aussi que

$$\|\Delta \mathbf{u}\| < \mu(\tilde{\xi}_2, t) \quad (4.49)$$

La fonction  $\mu$  est supposée aussi être bornée par rapport au temps  $t$  et localement uniformément bornée par rapport à  $\xi_2$ .

Dans le but d'estimer la fonction  $\bar{\sigma}_1$ , on suppose

$$(1) \quad \sup_{t \geq 0} \|\tilde{\mathbf{x}}_{2d}\| < L < \infty \quad (4.50)$$

$$(2) \quad \|\mathbf{Q}^*\| \leq \alpha \leq 1, \quad \forall \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ pour un } \alpha \text{ donné.} \quad (4.51)$$

$$(3) \quad \|\omega^*\| \leq \phi(\xi_2, t) \text{ pour une fonction } \phi \text{ connue et bornée dans le temps} \quad (4.52)$$

Ainsi d'après l'expression de  $\bar{\sigma}_1$ , on peut écrire

$$\|\bar{\sigma}_1\| \leq \|\mathbf{Q}^* \Delta \mathbf{u} + \mathbf{d}^* + \mathbf{Q}^* \tilde{\mathbf{x}}_{2d} - \mathbf{K} \tilde{\xi}_2 + \mathbf{M}_{22}^{*-1} \omega^*\| \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha \mu(\tilde{\xi}_2, t) + \alpha L + \|\mathbf{K}\| \|\tilde{\xi}_2\| + \|\mathbf{d}^*\| + \bar{M} \phi(\tilde{\xi}_2, t) \\ &=: \mu(\tilde{\xi}_2, t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

où  $\bar{M}$  est telle que

$$\|\mathbf{M}_{22}^*(x_2)\| \leq \bar{M}$$

puisque  $0 < \alpha < 1$  et on doit résoudre pour  $\mu$  la relation

$$\mu(\tilde{\xi}_2, t) = \frac{1}{1-\alpha} \left( \alpha L + \|\mathbf{K}\| \|\tilde{\xi}_2\| + \|\mathbf{p}^*\| + \overline{M} \phi(\tilde{\xi}_2, t) \right) \quad (4.55)$$

Il est à noter, que peut importe son choix,  $\Delta u$  doit satisfaire la relation (4.47).

**Hypothèse 4.3** Les fonctions connues  $\mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2$ ,  $\mathbf{B}_2$  et  $\mu(\tilde{\xi}_2, t)$ , ainsi que les fonctions inconnues  $\overline{\sigma}_i$ , sont continues par rapport à leurs variables. De plus, étant donné un ensemble compact  $\Xi \subset \mathbb{R}^{2(n-m)}$ , il existe deux fonctions non-négatives  $m_i(\cdot)$ ,  $i=1, 2$ , telle que pour tout  $(\tilde{\xi}_2, t) \in \mathbb{R}^{2(n-m)} \times [a, b]$ ,

$$\|\mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2(t)\| \leq m_1(t) \quad (4.56)$$

$$\text{et} \quad \|\mathbf{B}_2\| \mu(\tilde{\xi}_2, t) \leq m_2(t) \quad (4.57)$$

**Propriété 4.5** Pour le système nominal

$$\dot{\tilde{\xi}}_2(t) = \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2(t) \quad (4.58)$$

l'origine  $\tilde{\xi}_2=0$  étant exponentiellement stable, la fonction de Lyapunov  $V(\tilde{\xi}_2, t)$  donnée par (4.35), vérifie, pour tout  $(\tilde{\xi}_2, t) \in \mathbb{R}^{(n-m)} \times \mathbb{R}$ ,

$$\gamma_1(\|\tilde{\xi}_2\|) \leq V(\tilde{\xi}_2, t) \leq \gamma_2(\|\tilde{\xi}_2\|) \quad (4.59)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial V(\tilde{\xi}_2, t)}{\partial t} + \nabla_{\tilde{\xi}_2}^T V(\tilde{\xi}_2, t) \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2 \leq -\gamma_3(\|\tilde{\xi}_2\|). \quad (4.60)$$

$\gamma_i(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i=1, 2$  sont deux fonctions scalaires de classe- $\mathbf{K}$ ,  $\gamma_3(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction scalaire continue, définie positive, satisfaisant  $\gamma_j(0)=0$ ,  $j=1, 2, 3$  et  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_i(s) = \infty$

**Preuve:** D'après la définition de  $V$ , on peut écrire

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \leq V(\tilde{\xi}_2, t) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad (4.61)$$

et que

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}(\tilde{\xi}_2, t)}{\partial \tilde{\xi}_2} \right\| = \left\| 2\tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \right\| \leq 2\|\mathbf{P}\| \|\tilde{\xi}_2\| = 2\lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\tilde{\xi}_2\|. \quad (4.62)$$

À partir de (4.61) et (4.62), on peut conclure que

$$\frac{\partial \mathcal{V}(\tilde{\xi}_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}(\tilde{\xi}_2, t)}{\partial \tilde{\xi}_2} \mathbf{A}_2 \tilde{\xi}_2 \leq -2\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}_2\|^2. \quad (4.63)$$

avec

$$\gamma_1(.) = \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad (4.64)$$

$$\gamma_2(.) = \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad (4.65)$$

$$\gamma_3(.) = 2\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 \quad (4.66)$$

satisfaisant  $\gamma_j(0) = 0, j = 1, 2, 3$  et  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_i(s) = \infty$

□

#### 4.3.2 Stabilisation robuste par retour d'état continu

Il est bien connu que si la fonction des bornes des incertitudes  $\mu$  est connue et que si le système nominal (4.58) est exponentiellement stable, il existe plusieurs commandes par retour d'état pouvant stabiliser le système incertain (4.54). Gutman (1979) a élaboré la commande min-max. Cette commande étant discontinue, peut causer certains effets indésirables en pratique. Corless et Leitmann (1981), élaborèrent la commande de type saturation. Cette commande a été développée pour garantir l'existence d'une solution classique et continue. Un élément de cette classe est une fonction Carathéodorie telle que, pour un  $\varepsilon > 0$ ,

$$\Delta \mathbf{u}(\tilde{\xi}_2, t) = -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\|} \text{ si } \|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\| > \varepsilon$$

et  $\|\Delta \mathbf{u}(\tilde{\xi}_2, t)\| < \mu(\tilde{\xi}_2, t)$  si  $\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\| < \varepsilon$  (Corless et Leitmann 1981)

Un exemple particulier d'une telle commande est:

$$\Delta \mathbf{u}(\tilde{\xi}_2, t) = \begin{cases} -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\|} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \notin \aleph \\ -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\varepsilon} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \aleph \end{cases} \quad (4.67)$$

où  $\varepsilon$  est une constante positive.

$$\rho(\tilde{\xi}_2, t) = \mathbf{B}_2^T(\tilde{\xi}_2, t) \nabla_{\tilde{\xi}_2} V(\tilde{\xi}_2, t) \mu(\tilde{\xi}_2, t) \quad (4.68)$$

$V(\tilde{\xi}_2, t)$  est la fonction de Lyapunov pour le système nominal.

$\aleph$  définissant la surface de commutation et elle est donnée par

$$\aleph = \{(\tilde{\xi}_2, t): \rho(\tilde{\xi}_2, t) \leq \varepsilon\}. \quad (4.69)$$

$\Delta \mathbf{u}(\tilde{\xi}_2, t)$  est une fonction continue de Lebesgue.

**Théorème 4.1** *Considérons le système incertain (4.44), satisfaisant les hypothèses 4.2 et 4.3. La loi de commande robuste définie par*

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{cases} -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2}{\|\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2\|} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \notin \aleph \\ -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2}{\varepsilon} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \aleph \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\aleph = \{(\tilde{\xi}_2, t): \|\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2\| \leq \varepsilon\} \quad (4.71)$$

*est continue et stabilise uniformément et ultimement l'origine du système perturbé.*

**Preuve:** En dérivant la fonction de Lyapunov donnée par (4.35) le long des trajectoires du système perturbé (3.44), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) &= \dot{\tilde{\xi}}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \dot{\tilde{\xi}}_2 \\ &= \tilde{\xi}_2^T (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_2) \tilde{\xi}_2 + 2 \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 (\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) \\ &= \tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + 2 \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 (\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1)\end{aligned}\quad (4.72)$$

Pour alléger l'écriture, dénotant

$$\mathbf{z} = \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \quad (4.73)$$

(1) Si  $(\tilde{\xi}_2, t) \notin \mathcal{N}$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Swartz, on peut écrire

$$\mathbf{z}(\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) = \mathbf{z} \left( \bar{\sigma}_1 - \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \quad (4.74)$$

$$\leq \|\mathbf{z}\| (\|\bar{\sigma}_1\| - \mu) < 0 \quad (4.75)$$

et donc

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) < -\tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 \quad (4.76)$$

(2) Si  $(\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{N}$

$$\mathbf{z}(\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) \leq \mathbf{z} \left( \Delta \mathbf{u} + \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \quad (4.77)$$

$$= \mathbf{z} \left( -\frac{\mu}{\varepsilon} \mathbf{z} + \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \quad (4.78)$$

Ce dernier terme, atteint sa valeur maximale de  $\varepsilon \mu / 2$  quand  $\|\mathbf{z}\| = \varepsilon / 2$ . On peut ainsi écrire pour les deux cas

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) \leq \tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + \varepsilon \mu \zeta(t) / 2$$

$$\dot{V}(\bar{\xi}_2, t) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\bar{\xi}_2\|^2 + \varepsilon\mu / 2 \quad (4.79)$$

Utilisant la même terminologies que Corless et Leitmann (1981), on peut déduire ainsi que l'origine est uniformément ultimement stable pour

$$\|\bar{\xi}_2\| > \left( \frac{\varepsilon\mu}{2\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \right) \quad (4.80)$$

□

Cette loi de commande ne garantit pas une stabilisation asymptotique, mais la stabilité du système résulte de la borne ultime des états, à cause que la dérivée de la fonction de Lyapunov  $\dot{V}(\bar{\xi}_2, t)$  n'est pas partout définie négative. Cette commande est aussi discontinue quand  $\varepsilon = 0$ , ce qui constitue un inconvénient au niveau de l'implantation pratique.

Se basant sur cette structure de commande, Corless et Leitmann (1983) ont développé une commande adaptative robuste, où les états du système convergent vers zéro, mais la stabilité reste toujours ultime. Dans ce qui suit, en se basant sur l'idée de base de Corless et Leitmann (1981) et l'amélioration apportée par Qu (1994), nous allons développer une loi de commande garantissant au système incertain une stabilisation asymptotique. On suppose que le système satisfait les hypothèses 4.2 et 4.3.

Considérons maintenant la classe de fonctions uniformément continues  $\zeta(t)$  satisfaisant  $0 < \zeta(t) \leq 1$  et  $\omega(t) \leq 0$  où  $\omega(t) =: \int \zeta(t) dt$  dénotant l'intégrale indéfinie de  $\zeta(t)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , considérons aussi la classe de fonction

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{cases} -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\|} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \notin \aleph \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}(\tilde{\xi}_2, t) & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \aleph \end{cases} \quad (4.81)$$

$\Delta \bar{\mathbf{u}}$  est une fonction satisfaisant  $\Delta \bar{\mathbf{u}} \leq \mu(\tilde{\xi}_2, t)$ ,  $\mu(\tilde{\xi}_2, t)$  est telle que définie antérieurement par (4.48).  $\aleph$  est définie maintenant par

$$\aleph = \{(\tilde{\xi}_2, t) : \rho(\tilde{\xi}_2, t) \leq \varepsilon \zeta(t)\} \quad (4.82)$$

Il est à noter que la commande (4.81) est bien définie lorsque  $\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \mu(\tilde{\xi}_2, t)$  pour tout  $(\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{R}^{2(n-m)} \times \mathcal{R}$ . Il est à noter aussi, que la continuité de (4.81) par rapport à  $\tilde{\xi}_2$  dépend du choix de la fonction  $\Delta \bar{\mathbf{u}}$ . Considérons donc le cas particulier

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{cases} -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\|} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \notin \aleph \\ -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\rho(\tilde{\xi}_2, t)}{\zeta(t)\varepsilon} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \aleph \end{cases} \quad (4.83)$$

La classe de commande (4.83) est de type saturation et possède la même formulation que celle donnée par (4.67). La différence entre les deux fonctions se situe au niveau de la commutation. En fait, la fonction de commutation dans (4.83) est définie par  $\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\| \leq \varepsilon \zeta(t)$ , la sphère de commutation se restreint quand le temps augmente puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ , par contre, elle demeure constante dans le cas de la commande (4.67), où la fonction de commutation est définie par  $\|\rho(\tilde{\xi}_2, t)\| = \varepsilon$ . Par conséquent, il sera montré que cette commande garantit la stabilité asymptotique du système. De plus,

il s'agit d'une commande continue, en comparaison à la commande min-max (Gutman 1979).

**Lemme 4.1** (Qu, 1994) *Supposons que  $V(.): \mathcal{R}^n \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$  une fonction de Lyapunov candidate pour le système (4.44) et vérifiant les propriétés*

$$(1) \quad \gamma_1(\|\tilde{\xi}_2\|) \leq V(\tilde{\xi}_2, t) \leq \gamma_2(\|\tilde{\xi}_2\|) \quad \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$$

$$(2) \quad \dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) \leq -\gamma(\|\tilde{\xi}_2\|) + \gamma(\eta)\zeta(t) \quad \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$$

où  $\eta$  est une constante positive,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont telles que définies dans la propriété 4.3,  $\gamma$  est une fonction continue et définie positive, et  $\gamma(0) = 0$ . Soit  $\omega(t) = \int \zeta(t) dt$  dénotant l'intégrale indéfinie de  $\zeta(t)$ . Si les fonctions  $\gamma$ ,  $\zeta(t)$  et  $\omega(t)$  satisfont  $\gamma(y) - \gamma(\eta) > 0$  lorsque  $y > \eta$ ,  $0 < \zeta(t) \leq 1$ ,  $\omega(t) \leq 0$  et si le paramètre  $\eta$  peut être choisi comme une fonction définie positive de  $\|\tilde{\xi}_{20}\|$ , donc toute solution continue  $\tilde{\xi}_2(t, \tilde{\xi}_2(0), t_0): [t_0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}^n$  du système (4.44), avec la condition initiale  $\tilde{\xi}_2(t_0) = \tilde{\xi}_{20}$ , est asymptotiquement stable au sens large.

La preuve de ce Lemme peut se trouver dans Qu (1994).

**Théorème 4.2** *Considérons le système incertain (4.44), satisfaisant les hypothèse 4.2 et 4.3 La loi de commande robuste définie par*

$$\Delta u = \begin{cases} -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2}{\|\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2\|} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \notin \mathcal{N} \\ -\mu(\tilde{\xi}_2, t) \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2}{\zeta(t)\varepsilon} & \forall (\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{N} \end{cases} \quad (4.84)$$

$$\mathcal{N} = \{(\tilde{\xi}_2, t): \|\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \tilde{\xi}_2\| \leq \varepsilon \zeta(t)\} \quad (4.85)$$



*est continue et stabilise asymptotiquement l'origine du système perturbé en large.*

**Preuve:** La dérivée de (4.35) le long des trajectoires du système perturbé (4.34) est

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) = \tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + 2 \tilde{\xi}_2^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 (\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) \quad (4.86)$$

(1) Si  $(\tilde{\xi}_2, t) \notin \mathcal{N}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) &= \mathbf{z} \left( \bar{\sigma}_1 - \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \\ &\leq \|\mathbf{z}\| (\|\bar{\sigma}_1\| - \mu) < 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) < -\tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 \quad (4.87)$$

(2) Si  $(\tilde{\xi}_2, t) \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\Delta \mathbf{u} + \bar{\sigma}_1) &\leq \mathbf{z} \left( \Delta \mathbf{u} + \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \\ &= \mathbf{z} \left( -\frac{\mu}{\varepsilon \zeta(t)} \mathbf{z} + \mu \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ce dernier terme, atteint sa valeur maximale de  $\varepsilon \mu \zeta(t) / 2$  quand  $\|\mathbf{z}\| = \varepsilon \zeta(t) / 2$ . On peut ainsi écrire pour les deux cas

$$\dot{V}(\tilde{\xi}_2, t) \leq \tilde{\xi}_2^T \mathbf{Q} \tilde{\xi}_2 + \varepsilon \mu \zeta(t) / 2 \quad (4.89)$$

$$\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\tilde{\xi}_2\|^2 + \varepsilon \mu \zeta(t) / 2 \quad (4.90)$$

Puisque  $|\zeta(t)| \leq 1$ , il existe donc  $0 < \iota < \infty$  telle que  $\varepsilon \mu = \gamma_3(\iota)$  et  $\gamma_3(y) - \gamma_3(\iota) > 0$  pour  $y > \iota$ . Donc selon le Lemme 4.1 toute solution du système nominal (4.49), en

particulier l'origine, est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système incertain (4.44).

La continuité de la solution et de la commande peuvent être montrées par le raisonnement suivant. L'hypothèse 4.2 et la continuité de  $\Delta u$  garantissent que la solution est continue en tout instant fini dans le temps. De plus, il s'ensuit d'après la propriété 3.4 que la solution est uniformément bornée. Ainsi, parce que la commande est bornée, la solution est uniformément continue sur  $[t_0, \infty)$ .

□

#### 4.4 Application

Considérons la même application que celle du chapitre 3. Nous supposons maintenant que les paramètres du système sont incertains. En effet, on suppose que les paramètres estimés du système sont:

$$\hat{a} = 1, \hat{b} = 0.5, \hat{c} = 0.5$$

Nous supposons aussi que le système est soumis à un vecteur de couples de perturbations externes constantes défini par

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} Nm.$$

et on choisira

$$x_{2d}(t) = q_{2d}(t) = (-1.57 + 0.9(1 - \cos 1.26t)) \text{ rad} \quad \text{quand } t < 2.5 \text{ sec}$$

$$x_{2d}(t) = 0.26 \text{ rad} \quad \text{quand } t \geq 2.5 \text{ sec}$$

$$\lambda_d = 10 N.$$

La figure 4.1 représente la trajectoire relative à la poursuite de la trajectoire avec la loi de commande robuste (4.84). Il est clair que la poursuite de la trajectoire est atteinte.

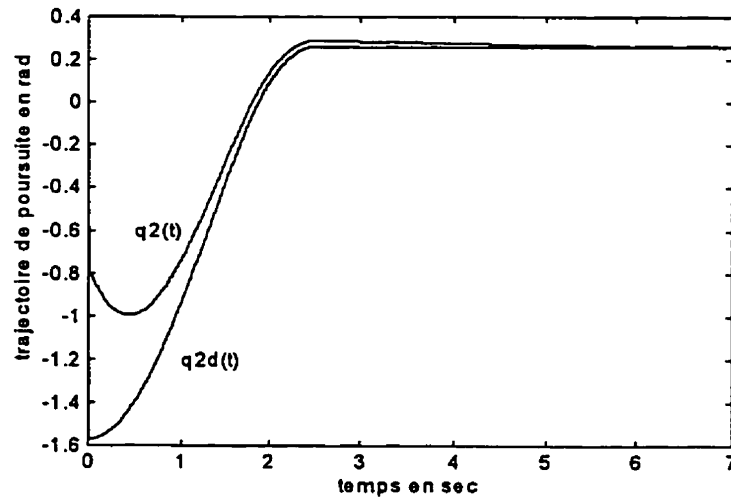


Figure 4.1 Trajectoire de poursuite du mouvement

La figure 4.2 représente les trajectoires relatives à l'erreur de poursuite. On peut vérifier la convergence asymptotique de l'erreur relative à la trajectoire de poursuite. Les caractéristiques dynamiques du système sont déterminées en fonction des gains du contrôleur.

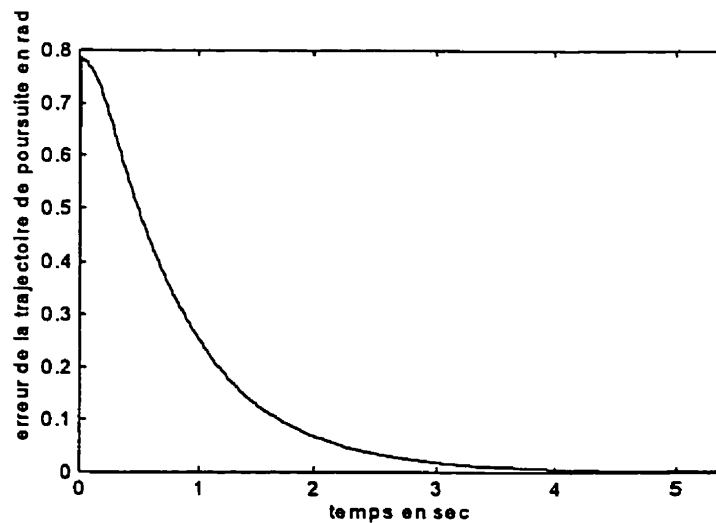


Figure 4.2 Erreur sur la trajectoire de poursuite

La figure 4.3 représente la force appliquée sur la surface des contraintes. Le régime dynamique est acceptable, sauf si on ne peut tolérer un dépassement de la valeur de la force appliquée. La discontinuité qui apparaît à 2.5 secondes est due au fait, que, dans la simulation, la fonction de la trajectoire désirée de déplacement, n'est pas dérivable à 2.5 sec. La figure 4.4 représente l'erreur de la force des contraintes. La convergence de la grandeur de la force est toujours vérifiée.

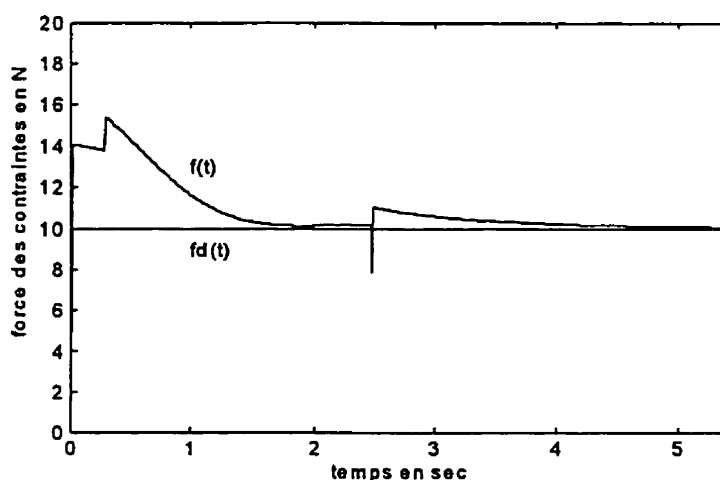


Figure 4.3 Force appliquée sur la surface des contraintes

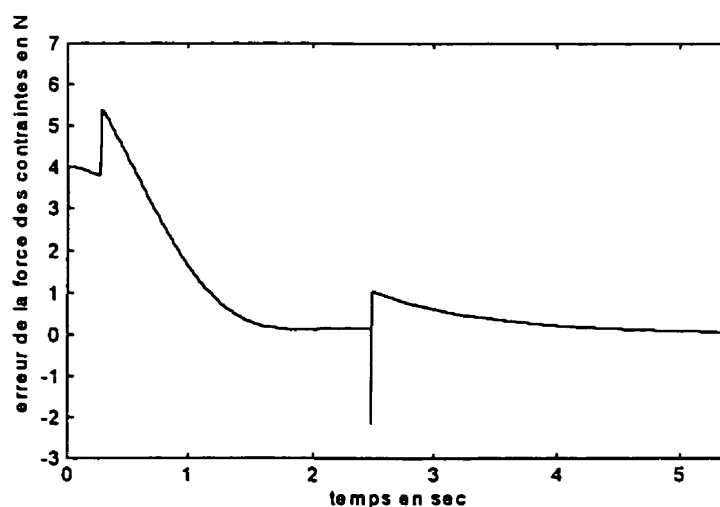


Figure 4.4 Erreur de la force des contraintes

La figures 4.5 représente l'effort de la commande appliquée à chacune des articulations.

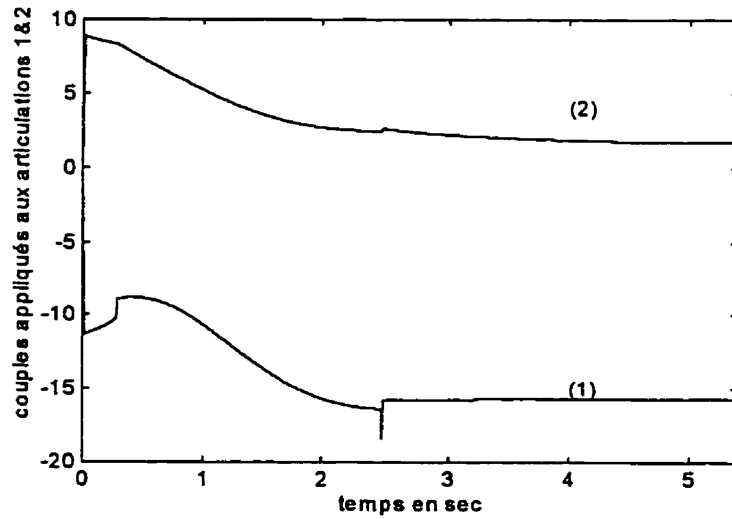


Figure 4.5 Couples appliqués aux articulations 1 et 2

La figure 4.6 représente la trajectoire de l'erreur de poursuite en employant la loi de commande (4.70). une erreur en régime permanent persiste dans ce cas, et la stabilité du système est ultimement bornée.

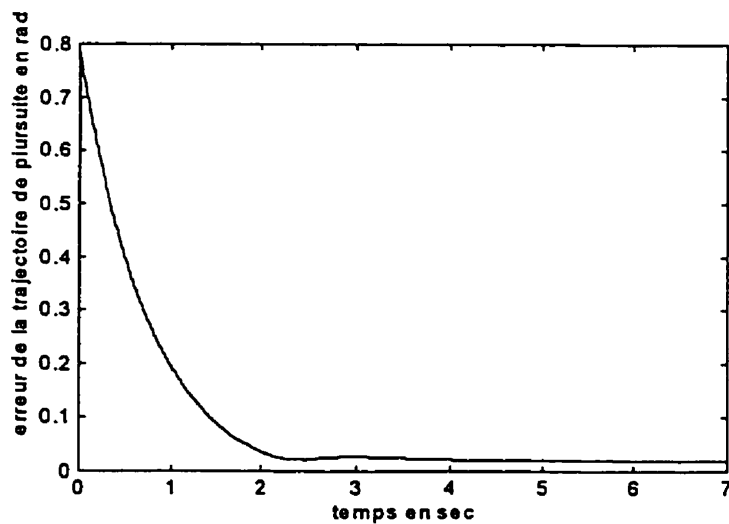


Figure 4.6 Erreur sur la trajectoire de poursuite

Les résultats de simulation montrent la convergence asymptotique du système perturbé. La convergence de la grandeur des forces de contraintes est aussi assurée. La fonction qui majore les incertitudes a été calculée par l'utilisation des bornes limites de la variation des paramètres du système et des perturbations externes. Cette technique requiert un temps de discrétisation extrêmement faible afin d'éviter un phénomène de commutation pouvant affecter le couple du système.

#### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé une commande linéarisante et découplante robuste pour un manipulateur robotique avec contraintes holonomes. La boucle de robustesse intervient uniquement sur les variables de déplacement. En effet, pour les variables correspondant aux forces de contraintes, un contrôleur proportionnel-intégral est suffisant pour assurer la convergence des erreurs. Ceci étant possible, à cause de la nature découplée de la dynamique transformée du manipulateur. La stabilité de tout le système, dépendant uniquement de la stabilité de la dynamique réduite du système, nous a permis de réduire l'étude de la stabilité du système à celle de la dynamique réduite. Les approches de commande robuste présentées dans ce chapitre nécessitent la connaissance de la fonction majorant la fonction des perturbations. Si la connaissance de cette fonction manque de précision, on pourrait soit avoir des couples de démarrage excessifs ou bien une déstabilisation du système. Il est à noter aussi que ces approches requièrent une période de discrétisation très faible.

## **CHAPITRE 5**

### **COMMANDE À STRUCTURE VARIABLE ADAPTATIVE**

#### **5.1 Introduction**

Dans le chapitre 3, nous avons montré que les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes sont complètement linéarisables au sens entrée-sorties. Ainsi, ces systèmes peuvent être adéquatement commandés par des contrôleurs utilisant un retour d'état du système. Comme on l'a déjà vu au chapitre 3, les performances du système en chaîne fermée se détériorent en présence d'incertitudes sur les paramètres du système et des perturbations externes qui peuvent agir sur le système. L'adjonction d'une boucle de robustesse, suggérée à la section 4.3, devient assez critique lorsque les grandeurs des perturbations deviennent importantes. Une solution peut être envisagée pour remédier à ce problème, et qui consiste à une adaptation des paramètres inconnus du système. Ceci suppose que le système ne change pas de structure. Dans ce chapitre, nous développons deux stratégies de commande d'un manipulateur robotique avec contraintes holonomes. Ces deux approches se basent sur la théorie des systèmes à structure variable. Dans la section 5.2 nous rappelons les idées de base de la commande des systèmes à structure variable. La section 5.3 est consacrée à la commande des manipulateurs robotiques avec contraintes holonomes utilisant l'approche de commande à structure variable. La section 5.4 traite de la commande des manipulateurs avec contraintes holonomes par l'approche de commande à structure variable adaptative.

## 5.2. Systèmes à structure variable

L'application de la commande à structure variable n'est pas nouvelle en automatique. C'est une approche dont les bases ont été élaborées essentiellement dans la littérature soviétique (Emelyanov 1957; Flippov 1964). Utkin (1977) qui fut le premier à appliquer cette technique à la régulation des systèmes linéaires. Young (1978) appliqua la commande à structure variable hiérarchisée à la commande des manipulateurs robotiques. Slotine (1983) appliqua cette commande comme une approche de commande robuste. Durant les années 80 cette technique n'a cessé de prendre de l'expansion, et nombreux sont les auteurs qui ont contribué à la mise en œuvre de cette commande tant du point de vue théorique qu'expérimental (Slotine 1984, Walcott et Zak 1987, Slotine 1985, Harashima et al. 1988, Hached et al. 1988). L'application de la commande à structure variable dans la commande des manipulateurs robotiques avec contraintes est très récente. Slotine et Li (1988) appliquèrent cette technique pour la commande d'impédance lors des contacts souples, Bin et al. (1992), étudièrent aussi l'application de la commande à structure adaptative pour les systèmes avec contact souples. Su et al. (1992) appliquèrent cette commande à un manipulateur robotique avec contact rigide, utilisant une représentation spéciale de la dynamique du système. Dans cette section, nous étudions une approche de la commande à structure variable appliquée à un manipulateur avec contraintes holonomes, utilisant la formulation dynamique du chapitre 2 de cette thèse.



### 5.2.1 Mode de glissement

Considérons le système non-linéaire mono-entrée décrit par l'équation dynamique suivante

$$y^{(n)} = f_1(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) + g_1(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})u \quad (5.1)$$

$y \in \mathfrak{R}$  est le scalaire de sortie,  $u \in \mathfrak{R}$  est le scalaire d'entrée.  $f_1$  et  $g_1$  sont des fonctions analytiques, définies sur un ensemble ouvert de  $\mathfrak{R}^n$ .

En introduisant le vecteur d'état du système comme

$$\mathbf{x} = [y^{(n-1)} \quad y^{(n-2)} \quad \dots \quad y^{(1)} \quad y]^T \in \mathfrak{R}^n \quad (5.2)$$

Le système peut être écrit sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (5.4)$$

et

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \quad (5.5)$$

$\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  sont des vecteurs.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x})u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système est non-linéaire, mais il est affine en  $u$ .

L'objectif ici consiste à construire la loi de commande  $u$  de façon à ce que l'état  $\mathbf{x}=0$  soit une solution asymptotiquement stable en présence d'imprécisions de modèle sur  $f(\mathbf{x})$  et  $g(\mathbf{x})$ .

Le nom donné à la commande à structure variable est dû, en fait, à la possibilité que la commande  $u$  change de structure. Un des moyens de changer la structure du système est de considérer différents contrôleurs dans différentes parties de l'espace d'état du système. Considérons le cas où la loi de commande commute sur la surface

$$s(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.6)$$

Supposons que le système en boucle fermée est décrit par

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{f}^+(\mathbf{x}) & s(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{f}^-(\mathbf{x}) & s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Deux situations peuvent avoir lieu. Dans la première situation (Figure 5.1.a), les trajectoires passent à travers la courbe de commutation et continuent dans l'autre région. Cependant, la dynamique du système est différente d'une région à l'autre. Dans la figure 5.1.b, les champs de vecteurs amènent l'état du système jusqu'à la surface décrite par  $s(\mathbf{x}) = 0$ . La commande changera ainsi rapidement d'une valeur à une autre sur la surface de commutation, ce qui peut créer un phénomène de discontinuité de la commande. L'effet de ce changement de structure est que l'état du système se voit mouvoir sur  $s(\mathbf{x}) = 0$  et donc glisse le long de la surface. Ce phénomène est appelé *mode de glissement*. La surface  $s(\mathbf{x}) = 0$  est appelée *surface de glissement*.

Il existe trois importantes questions qui concernent le mode de glissement. Ces questions sont:

- Est-ce que les trajectoires commençant à n'importe quel point atteignent la surface de glissement?
- Existe-t-il un mode de glissement?
- Le mode de glissement est-il stable?

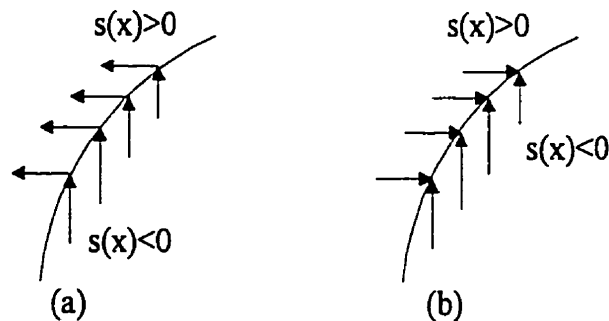


Figure 5.1. Les trajectoires du système (5.4) sur la surface de glissement.

(a): pas de mode de glissement; (b): mode de glissement

Dans la littérature (Utkin 1976, Slotine et Li 1991) des systèmes à structure variable, on peut trouver des réponses partielles à ces questions. Les réponses exactes à ces questions et la dérivation de la loi de commande du système dépendent fortement de la structure du système à commander.

### 5.3 Commande à structure variable d'un robot manipulateur avec contraintes holonomes

Dans le chapitre 2, nous avons développé le modèle dynamique du manipulateur robotique avec contraintes holonomes. Ce dernier possède la forme:

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}^* + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\boldsymbol{\lambda} \quad (5.8)$$

vérifiant les propriétés suivantes:

- (1)  $\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)$  est symétrique définie positive
- (2)  $\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$  définie par

$$\mathbf{N}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) - \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)$$

est antisymétrique.

**Propriété 5.1** *Le terme gauche de l'équation de la dynamique (5.8), peut être exprimé en fonction d'une paramétrisation d'un certain vecteur des paramètres inconnus  $\alpha$  telle que (Karelli et Kelly 1989):*

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2)\boldsymbol{\alpha} \quad (5.9)$$

$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  est la matrice des paramètres.  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^k$  est le vecteur des paramètres inconnus du système.

### 5.3.1 Conception du contrôleur

Le problème de conception du contrôleur à structure variable peut s'énoncer comme suit. Étant donnée une surface de glissement  $\mathbf{s} = 0$ , qui peut être non-linéaire ou variable dans le temps, il s'agit de déterminer une loi de commande  $\mathbf{u}$ , telle qu'un mode de glissement ait lieu sur la variété de glissement même quand avec certain ou tous les paramètres du manipulateur sont inconnus. Ainsi les performances du système en chaîne fermée seront décrites par la structure de la surface de glissement.

Considérons la surface de glissement décrite par l'équation

$$s(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{2d}, \dot{\mathbf{x}}_{2d}) = \mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2(t) + \Gamma \mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2(t) \quad (5.10)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_{2d} - \mathbf{x}_2$  et  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_{2d} - \dot{\mathbf{x}}_2$  représentant les vecteurs des erreurs relatives à la position et la vitesse généralisées du manipulateur robotique dans le repère de coordonnées résultant de la transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{q})$  définie au chapitre 2 ( $\mathbf{x}_{2d}$  et  $\dot{\mathbf{x}}_{2d}$  représentent respectivement les vecteurs désirés de  $\mathbf{x}_2$  et de  $\dot{\mathbf{x}}_2$ ).  $\Gamma \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est une matrice carrée diagonale définie positive;  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Pour alléger la présentation, dans tout ce qui suit, on notera  $s(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_{2d}, \dot{\mathbf{x}}_{2d})$  par  $s$ .

L'objectif ici est de concevoir le contrôleur  $\mathbf{u}$  dans (5.8) de manière à ce que  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_{2d}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{2d}$  et  $\lambda \rightarrow \lambda_d$  quand le temps  $t$  approche l'infini. Ainsi, si un mode de glissement a lieu, la dynamique réduite du système en chaîne fermée aura un comportement régi par l'équation

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \Gamma \tilde{\mathbf{x}}_2. \quad (5.11)$$

Les performances de ce comportement sera décrit par le choix de la matrice de pondération  $\Gamma$ .

D'un point de vue pratique, la formulation dynamique du système sous la forme (5.9) n'est pas très souhaitable, car elle requiert la mesure de l'accélération du système. Pour contourner le problème de la mesure de l'accélération, on définit le vecteur

$$\mathbf{v} = \mathbf{E}_2^T \dot{\mathbf{x}}_{2d} - \mathbf{E}_2^T \Gamma \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (5.12)$$

et 
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (5.13)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, il suffit de choisir une action intégrale pour garantir la convergence de la force des contraintes caractérisée par le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ .

Soit la loi de commande définie par

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) \varphi - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\lambda_d - \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt) \quad (5.14)$$

$\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice diagonale variable.  $\varphi \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur d'une fonction de commutation définie ultérieurement.

En tenant compte de (5.8) et (5.14), et considérant la Propriété 5.1, l'équation de la dynamique du manipulateur peut être réécrite maintenant sous la forme suivante

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\nu} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \nu + \mathbf{K}_1 \mathbf{s} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha)(\alpha - \varphi) + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt) \quad (5.15)$$

Pour déterminer la condition permettant d'atteindre un mode de glissement, pour une surface de glissement donnée par (5.10), considérons la fonction de Lyapunov de la forme suivante

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{s} \quad (5.16)$$

La dérivée de l'équation (5.16) par rapport au temps, le long de la solution de (5.14) donne

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha)(\varphi - \alpha) - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{s}) \\ & + \mathbf{s}^T (\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda})) + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{s} \end{aligned} \quad (5.17)$$

D'après la propriété 2.9 du chapitre 2, on obtient

$$\mathbf{s}^T (\mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt)) = 0 \quad (5.18)$$

En utilisant la propriété 5.1, on peut écrire

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\varphi - \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\alpha - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}) \quad (5.19)$$

Choisissons maintenant les  $\varphi_i$  composantes de  $\varphi$  comme suit:

$$\varphi_i = -\bar{\alpha}_i \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^n s_j Y_{ji}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a) \right) \quad (5.20)$$

où  $\bar{\alpha}_i$  représente la borne supérieure de  $\alpha_i$ , un scalaire supposé connu pour tout  $i$ .

L'expression (5.17) devient alors:

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\varphi - \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\alpha) \quad (5.21)$$

$$\leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \left| \sum_{j=1}^n s_j Y_{ji} \right| - \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n s_j Y_{ji}$$

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}$$

ce qui donne

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) \|\mathbf{s}\|^2 \quad (5.22)$$

où  $\lambda_{\min}(\cdot)$  dénotant la valeur minimale des valeurs propres de  $(\cdot)$ .

L'équation de la dynamique de l'erreur de force est donnée par

$$\mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt) = \varepsilon(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a) \quad (5.23)$$

Si les trajectoires désirées appartiennent à la variété définie par (3.64), donc  $\bar{\lambda}_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .  
Sinon,

$$\|\bar{\lambda}\| = \varepsilon(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a) \|\mathbf{I} + \mathbf{K}_\lambda\|^{-1} \quad (5.24)$$

plus grand est  $\|\mathbf{K}_\lambda\|$ , plus faible est  $\|\bar{\lambda}\|$ .

Le développement précédent peut être formulé sous le théorème suivant:

**Théorème 5.1** *Étant donné le manipulateur robotique décrit par l'équation dynamique (5.8), avec tous ou quelques paramètres inconnus, sous la loi de commande (5.14), un mode de glissement aura lieu en un temps fini et l'on aura  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_{2d}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{2d}$  et  $\lambda \rightarrow \lambda_d$ .*

**Remarques:** (1) Les bornes supérieures utilisées pour calculer les gains de commutation sont déterminées en fonction des variations des paramètres, au lieu des éléments des matrices du système.

(2) La loi de commande (5.14) n'est pas basée sur un choix particulier de la surface de glissement.

### 5.3.2 Stabilisation robuste du système

En pratique, lors du fonctionnement du système, des états non modélisés et des perturbations extérieures non incluses dans la dynamique (5.8) peuvent affecter la stabilité du système. Dans cette sous-section, on analyse la robustesse de la loi de commande (5.14) face à ce type d'incertitudes. On suppose que le manipulateur robotique est maintenant décrit par l'équation



$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}^* + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)\lambda + \mathbf{d} \quad (5.25)$$

où  $\mathbf{d}$  représente le vecteur des perturbations du système

En général, on suppose que l'intensité du vecteur des perturbations est borné par un simple scalaire. Cette supposition reste assez valable pour les perturbations externes, mais elle est considérée restrictive dans le cas des états non modélisées. D'une manière générale, les états non modélisées sont fonctions des états du système. Ainsi, nous supposons que les effets des perturbations satisfont la relation suivante

$$\|\mathbf{d}\| \leq d_0 + d_1 \|\mathbf{s}\| \quad (5.26)$$

où  $d_0$  et  $d_1$  sont des constantes positives.

Pour remédier à ce type de perturbations, nous ajoutons à la loi de commande (5.14) un terme de robustesse caractérisé par la fonction de signum de la surface de glissement  $\mathbf{s}$ .

Considérons donc la loi de commande

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\varphi - \mathbf{K}_1\mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\lambda_d - \int \tilde{\lambda} dt) \quad (5.27)$$

$\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice diagonale de gains réglables.

Le terme  $\mathbf{K}_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{s})$  est ajouté ici pour contrer l'effet des perturbations externes statiques.

**Théorème 5.2** *Pour le système incertain (5.25), la loi de commande (5.27) est robuste face aux perturbations (5.26) et assure que  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_{2d}$  et  $\dot{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{2d}$  si les matrices des gains  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  sont convenablement choisies.*

**Preuve:** La combinaison de (5.25) et (5.27) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{E}_2^T \dot{\nu} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{E}_2^T \nu + \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) = \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a)(\alpha - \varphi) + \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \int \tilde{\lambda}) + \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Considérons toujours la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{s} \quad (5.29)$$

La dérivation de l'équation (5.29) par rapport au temps, le long de la solution de (5.28) donne,

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a) \varphi - \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a) \alpha - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + \mathbf{d}) \quad (5.30)$$

D'après la propriété du chapitre 2.9, l'on a nécessairement

$$\mathbf{s}^T (\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \int \tilde{\lambda} dt)) = 0 \quad (5.31)$$

et utilisant la propriété 4., on peut écrire

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{Y} \varphi(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a) - \mathbf{Y} \alpha(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a) - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) \quad (5.32)$$

et selon (5.26), on peut écrire

$$\begin{aligned} -\mathbf{s}^T \mathbf{d} &\leq \|\mathbf{s}\| (d_0 + d_1 \|\mathbf{s}\|) \\ &\leq d_0 \|\mathbf{s}\| + d_1 \|\mathbf{s}\|^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Il s'en suit donc que

$$\dot{V} \leq -(-\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - d_1) \|\mathbf{s}\|^2 - (-\lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - d_0) \|\mathbf{s}\| \quad (5.34)$$

Il est toujours possible de choisir  $K_1$  et  $K_2$  tels que  $\sigma_1 = -\lambda_{\min}(K_1) - d_1 > 0$  et  $\sigma_2 = \lambda_{\min}(K_2) - d_0 > 0$ . Donc,

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\sigma_1 \|s\|^2 - \sigma_2 \|s\| \\ \dot{V} &\leq -\sigma_2 \|s\|\end{aligned}\tag{5.35}$$

Le système est donc asymptotiquement stable

□

**Remarque:** Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatif aux forces des contraintes dépend directement de l'accélération du système. En considérant la loi de commande (5.27), la présence du terme comportant la fonction signum dans la loi de commande génère une discontinuité dans l'accélération du système. Par conséquent le vecteur des forces de contraintes sera discontinu, et la convergence de ce vecteur ne peut être assurée.

### 5.3.3 Élimination des commutations

En général, la commande (5.14) est associée avec un problème de bruits hautes fréquences causés par le phénomène de commutation de la commande sur la surface de glissement. En pratique, ces fréquences qui requièrent des efforts de commande de haute fréquence sont très indésirables et peuvent exciter les modes hautes fréquences négligées dans la dynamique du manipulateur. Ce phénomène peut être contré en lissant la discontinuité de la commande dans une fine bande au voisinage de la surface de commutation. Cette bande est définie par:

$$\chi(t) = \left\{ x_2(t), |s(x_2, \dot{x}_2)| < \beta \right\}\tag{5.36}$$

où  $\beta$  représente l'épaisseur de la bande ( $\beta > 0$ ) et en choisissant  $\mathbf{u}^*$  comme dans (5.14) à l'extérieur de  $\chi(t)$  et remplacer la fonction  $\text{sgn}(\cdot)$  par la fonction saturation  $(\cdot)/\beta$  à l'intérieur de  $\chi(t)$  (Slotine 1984).

#### 5.4 Version adaptative de la commande à structure variable d'un manipulateur avec contraintes holonomes

L'algorithme présenté à la section précédente se base sur l'approximation de la borne supérieure des paramètres du système. Cette borne n'est pas toujours disponible et une approximation élevée des bornes des incertitudes peut présenter l'inconvénient de développer des couples de démarrage assez élevés. Ceci constitue un inconvénient pratique majeur. Il est donc souhaitable d'introduire un schéma adaptatif à la commande précédente.

Considérons toujours la loi de commande

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \text{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_2)(\lambda_d - \int \tilde{\lambda} dt) \quad (5.37)$$

avec

$$\varphi_i = -\hat{\alpha}_i \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n s_j \mathbf{Y}_{ji}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha)\right), \quad i = 1, \dots, k \quad (5.38)$$

$k$  représente la dimension du vecteur des paramètres du système.

Considérons maintenant la loi d'adaptation

$$\dot{\hat{\alpha}}_i = \delta_i \left| \sum_{j=1}^n s_j \mathbf{Y}_{ji}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) \right|, \quad i = 1, \dots, k \quad (5.39)$$

où  $\delta_i > 0$  des constantes positives arbitraires. La loi d'adaptation (5.39) peut être vu comme un effort pour déterminer les bornes des paramètres inconnus du système. le paramètre de conception  $\delta_i$  détermine le taux d'adaptation.

Le théorème suivant prouve la stabilité de l'algorithme en présence du processus d'adaptation.

**Théorème 5.3** *Étant donné le système robotique avec contraintes holonomes (5.8), la loi de commande (5.37) avec la loi d'adaptation (5.38) stabilise asymptotiquement le système incertain et assure que  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_{2d}$  et  $\dot{\mathbf{x}}_2 \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_{2d}$  ainsi qu'une borne ultime de l'erreur des force du système.*

**Preuve:** Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^* (\mathbf{x}_2) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (|\alpha_i| - \hat{\alpha}_i)^2 / \delta_i \quad (5.40)$$

La dérivée de (5.40) le long des trajectoires de (5.28) est donnée par

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}^* (\mathbf{x}_2) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \ddot{\mathbf{M}}^* (\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{s} + \sum_{i=1}^k (|\alpha_i| - \hat{\alpha}_i) (-\dot{\hat{\alpha}}_i) / \delta_i \quad (5.41)$$

Évaluons  $\dot{V}$  le long des trajectoires de (5.28), nous aurons

$$\dot{V} = \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}\varphi - \mathbf{Y}\alpha - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{K}_2 \text{sgn}(\mathbf{s})) - \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \left| \sum_{j=1}^n s_j y_{ji} \right| + \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i \left| \sum_{j=1}^n s_j y_{ji} \right| \quad (5.42)$$

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) \|\mathbf{s}\| \quad (5.43)$$

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) \|\mathbf{s}\| \quad (5.44)$$

La fonction  $\dot{V}$  est définie semi-négative et s'annule seulement dans le cas où  $s = 0$ . En appliquant le Théorème de Lasalle (Khalil 1991), l'on a ainsi que  $s \rightarrow 0$ . Le résultat de la convergence de la force est similaire à celui obtenu en 5.3.1.

□

### 5.5 Application

Considérons la même application que celle du chapitre 3. Nous supposons maintenant que les paramètres du système sont incertains. En effet, on suppose que les paramètres estimés du système sont:

$$\hat{a} = 1, \hat{b} = 0.5 \text{ et } \hat{c} = 0.5.$$

Nous supposons aussi que le système est soumis à un vecteur de couples de perturbations externes constantes défini par

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} Nm.$$

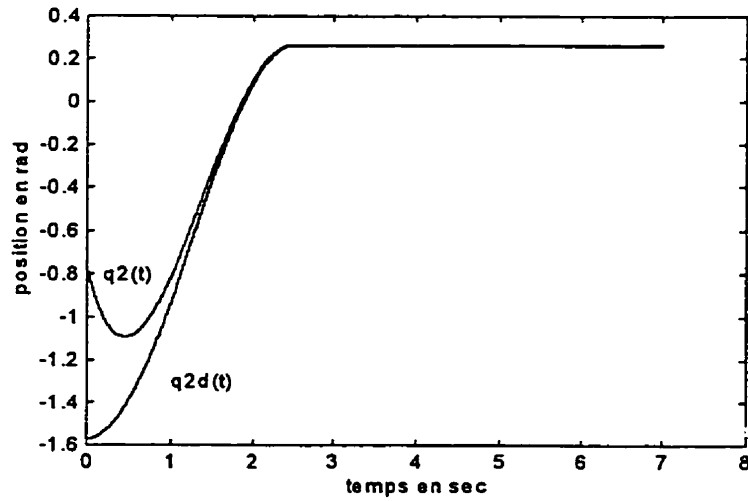
On choisira comme trajectoires désirées

$$x_{2d}(t) = q_{2d}(t) = (-1.57 + 0.9(1 - \cos 1.26t)) \text{ rad} \quad \text{quand } t < 2.5 \text{ sec}$$

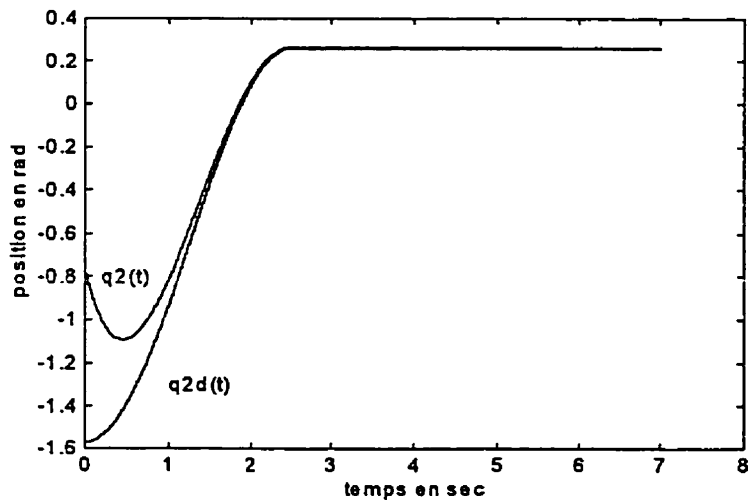
$$x_{2d}(t) = 0.26 \text{ rad} \quad \text{quand } t \geq 2.5 \text{ sec}$$

$$\lambda_d = 10 N$$

Les figures 5.2 (a) et 5.2 (b) représentent la trajectoire relative à la poursuite de la trajectoire respectivement avec les lois de commande (5.37) et (5.27). La poursuite de la trajectoire est achevée par les deux lois de commandes, avec une dynamique similaire.



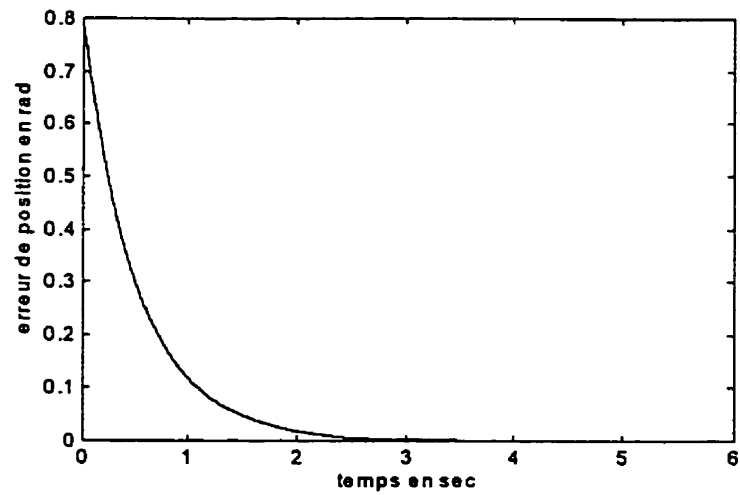
(a)



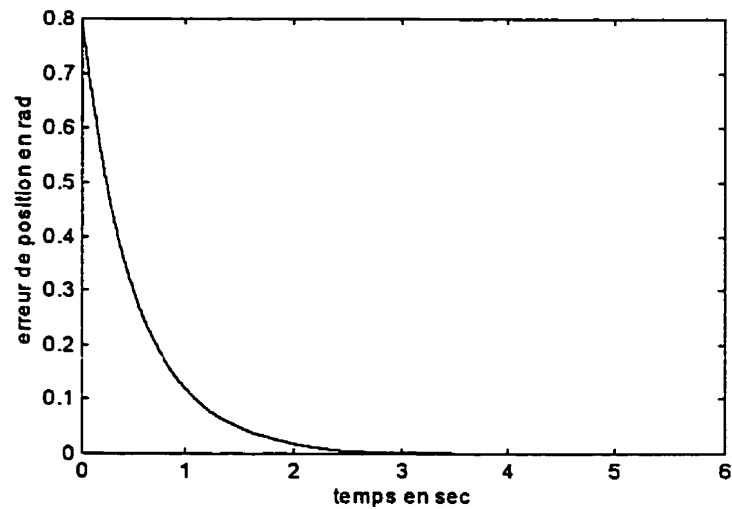
(b)

Figure 5.2 Trajectoire de poursuite du mouvement

Les figures 5.3 (a) et 5.3 (b) représentent la trajectoire relative à l'erreur de poursuite de la trajectoire respectivement avec les lois de commande (5.37) et (5.27). L'erreur converge vers zéro, et la convergence asymptotique du système est garantie.



(a)



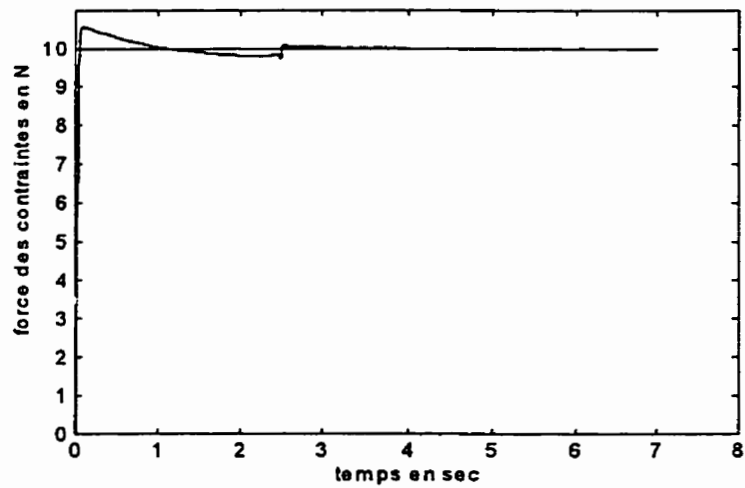
(b)

Figure 5.3 Erreur sur la trajectoire de poursuite

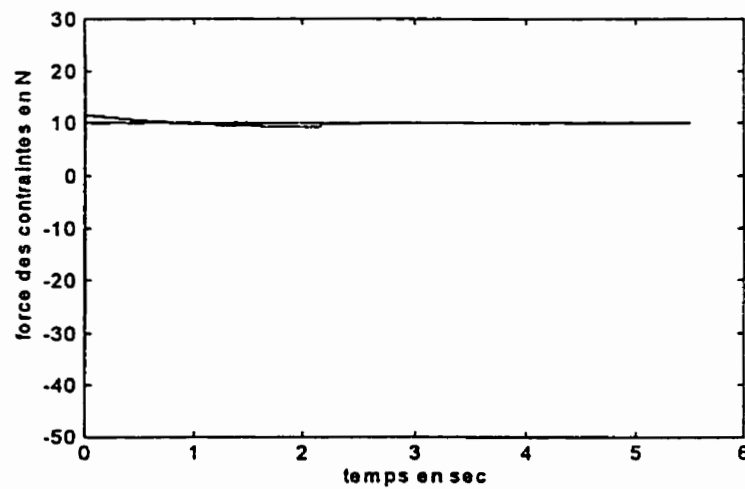
Les figures 5.4 (a) et 5.4 (b) représentent les forces des contraintes appliquées sur la surface des contraintes suite à l'application respectivement avec les lois de commande (5.37) et (5.27). Il est à remarquer que la loi de commande (5.37) garantit un régime



dynamique de la force plus souple que celui de la commande (5.27). Ceci est évidemment dû à l'effet de l'adaptation des paramètres du système. En pratique, cette considération peut être d'une assez grande importance.



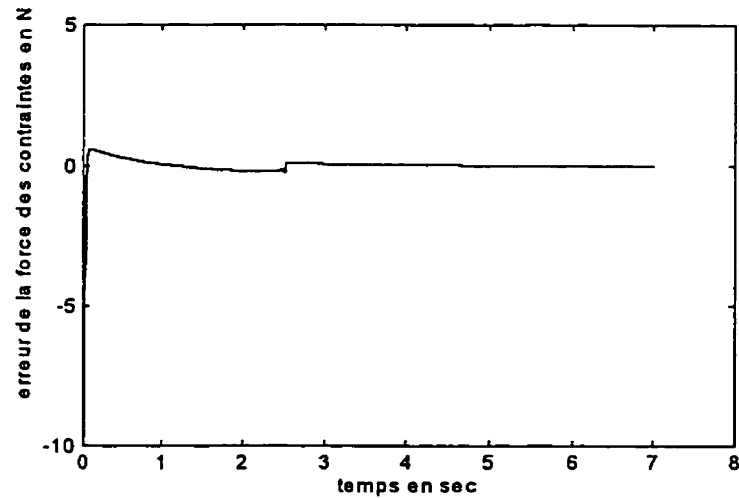
(a)



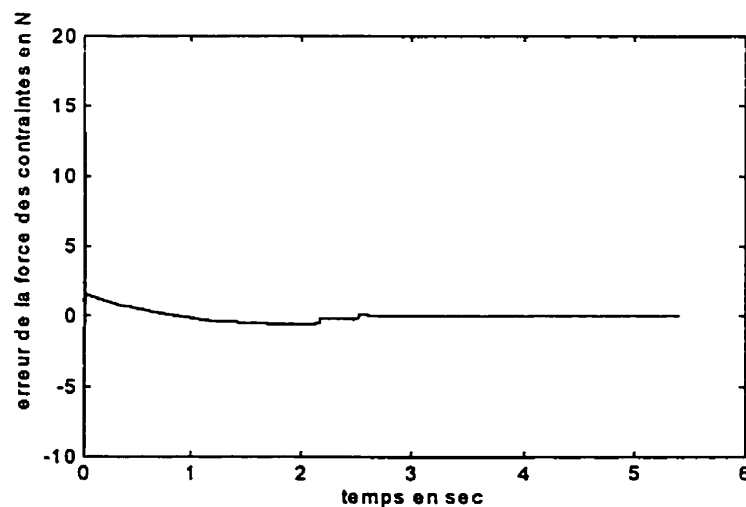
(b)

Figure 5.4 Force appliquée sur la surface des contraintes

Les figures 5.5 (a) et 5.5 (b) représentent les erreurs relatives aux forces des contraintes respectivement avec les lois de commande (5.37) et (5.27). La convergence de l'erreur de force est vérifiée dans les deux cas. Ceci est à cause de l'utilisation du terme intégral à la régulation de la force.



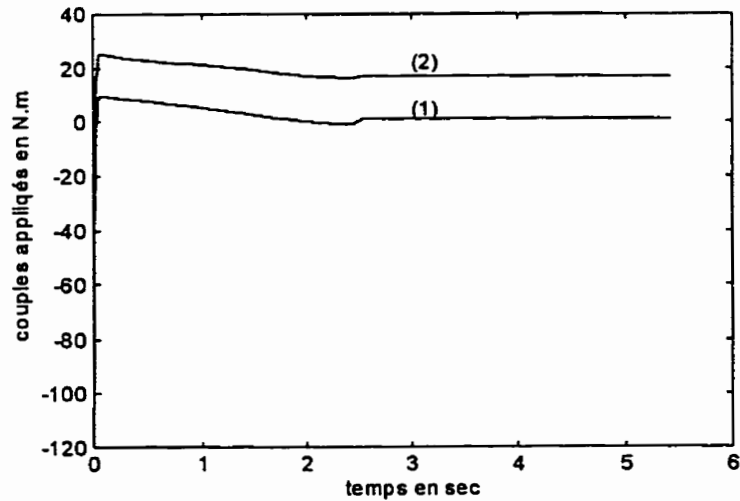
(a)



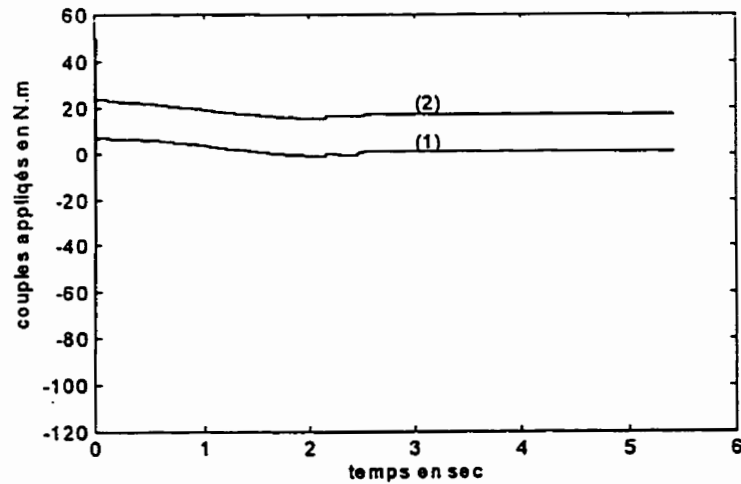
(b)

Figure 5.5 Erreur de la force appliquée sur la surface des contraintes

Les figures 5.6 (a) et 5.6 (b) représentent l'effort de la commande appliquée à chacune des articulations respectivement avec les lois de commande (5.37) et (5.27). Les couples de démarrage sont plus élevés avec la loi de commande (5.27), ceci est pour la même raison expliqué ci-haut.



(a)



(b)

Figure 5.6 Couples appliqués aux articulations 1 et 2

La figure 5.7 représente l'erreur de la poursuite de la trajectoire relative à la loi de commande (5.14). Ici, la fonction signe n'est pas utilisée, l'erreur en régime permanent est non nulle, à cause de la présence du vecteur de perturbations constantes. Dans ce cas, on garantit la continuité de la commande du système, cependant, il y aura un problème relatif à la convergence asymptotique des erreurs.

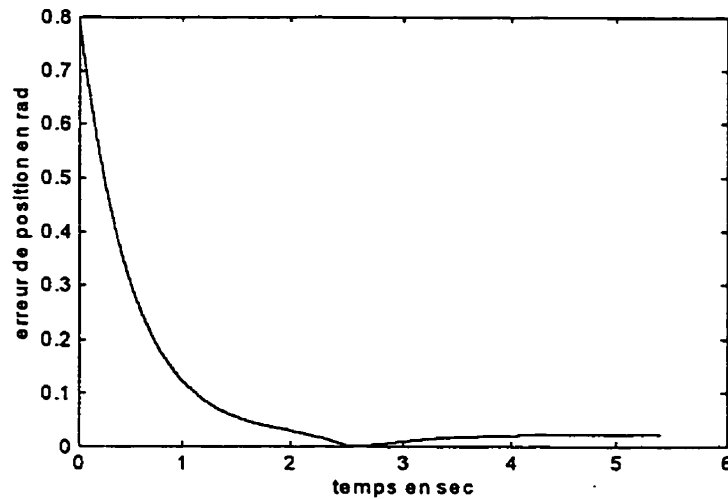


Figure 5.7 Erreur sur la trajectoire de poursuite avec (5.14)

Comparons les résultats trouvés dans ce chapitre à ceux de Su et al. (1992). Dans leurs approches, les auteurs utilisent une surface de glissement hybride. Elle est une fonction de l'erreur de position et de l'erreur de force. Dans ce cas, on peut garantir la stabilité du système mais non la convergence des erreurs. La figure 5.8 représente la simulation du système avec l'approche de Su et al. (1992).

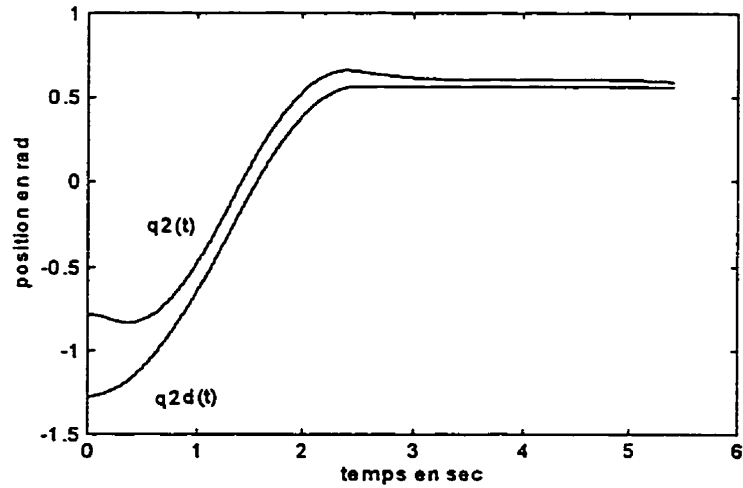


Figure 5.8 Trajectoire de poursuite avec l'approche de Su et al.

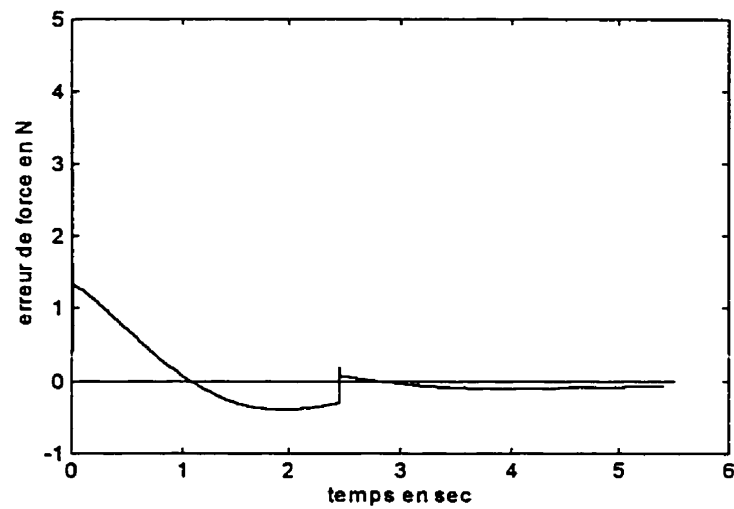


Figure 5.9 Erreur de force avec l'approche de Su et al.

## 5.5 Conclusion

Notre contribution dans ce chapitre était de développer des lois de commande robustes à structure variable appliquées aux systèmes robotiques avec contraintes holonomes. Ces approches reposent sur la théorie des systèmes à structure variable. Le processus

d'adaptation dans la deuxième approche a permis de réduire l'effet des couples élevés au démarrage. La composante additionnelle de robustesse du vecteur de commande utilisant la fonction signe, empêche la convergence de l'accélération du système vers l'accélération désirée, et par ailleurs la convergence du vecteur des forces des contraintes. Il est à noter aussi que les couples de démarrage sont assez élevés. Pour remédier à cet inconvénient, nous utiliserons dans le chapitre suivant une classe de fonctions continues qui remplace cette fonction discontinue.

## **CHAPITRE 6**

### **COMMANDE ROBUSTE PAR RETOUR D'ÉTAT CONTINU**

#### **6.1 Introduction**

Les lois de commande développées au chapitre précédent utilisent une fonction discontinue pour contrer les effets des perturbations du système. À cause de cette discontinuité, on ne peut assurer la convergence de l'accélération du système vers l'accélération désirée, et par conséquent la convergence du vecteur des multiplicateurs de Lagrange relatifs aux forces des contraintes. Dans ce chapitre, basé sur un retour d'état continu, de type saturation, on développe une variante de la loi de commande à structure variable. Cette loi de commande permet d'éliminer le problème de discontinuité de la commande et par conséquent assurant la convergence des forces des contraintes du système. La méthode développée dans cette section garde, en sorte, la même structure qu'une commande à structure variable mais dont la fonction de commutation sera modifiée par une fonction continue. Cette fonction garde le même aspect que la commande robuste développée au chapitre 4. Dans la section 6.2, on présente la loi de commande robuste par retour d'état continu. Dans la section 6.3, on présente une version adaptative à cette commande.

#### **6.2 Commande robuste par retour d'état continu**

Considérons le modèle dynamique d'un manipulateur robotique avec contraintes holonomes défini par:

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_2^T\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2)\mathbf{E}_2^T\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{G}^*(\mathbf{x}_2) = \mathbf{u}^* + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)\lambda \quad (6.1)$$

**Propriété 6.1** (Craig, 1988) *La matrice de masse d'un manipulateur robotique est définie positive et possède une borne supérieure et une borne inférieure. Cette propriété peut être formulée de la façon suivante:*

$$\gamma_1 \mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq \gamma_2 \mathbf{I}_n \quad (6.2)$$

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux constantes positives.

**Propriété 6.2** *Selon la propriété 6.1 on peut constater qu'il existe deux constantes positives  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , telle que*

$$\beta_1 \mathbf{I}_n \leq \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \leq \beta_2 \mathbf{I}_n \quad (6.3)$$

**Hypothèse 6.1** *On suppose que le modèle du système est incertain, dans le sens que le vecteur des paramètres  $\alpha$  est inconnu. On suppose aussi qu'existe un  $\alpha_0 \in \mathbb{R}^r$  et un  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , les deux sont supposés connus, telle que*

$$\|\tilde{\alpha}\| = \|\alpha - \alpha_0\| \leq \rho. \quad (6.4)$$

### 6.2.1 Commande par retour d'état continu

Définissons la loi de commande du système nominal comme

$$\mathbf{u}_0^* = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, v, a)\alpha_0 - \mathbf{K}_1 \mathbf{s} - \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)(\lambda_d - \int \tilde{\lambda} dt) \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{K}_1$  est une matrice de réglage diagonale définie positive.

Définissons aussi la loi de commande du système incertain en fonction du vecteur de commande du système nominal par:



$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) \mathbf{r} \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{r}$  est un élément de commande additionnel, utilisé pour contrer les effets des incertitudes du système, représentées par  $\tilde{\alpha}$ .

Substituons la loi de commande (6.6) dans la dynamique du manipulateur donnée par (6.1), nous aurons

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}^*(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2) \mathbf{s} + \mathbf{K} \mathbf{s} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) (\tilde{\alpha} + \mathbf{p}) + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2) (\bar{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \bar{\lambda} dt) \quad (6.7)$$

Choisissons la loi de commande robuste

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} -\rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} & \text{si } \mathbf{s} \notin \mathfrak{N} \\ -\frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{Y}^T \mathbf{s} & \text{si } \mathbf{s} \in \mathfrak{N} \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\mathfrak{N} = \{ \mathbf{s} / \|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| \leq \varepsilon \} \quad (6.9)$$

où  $\varepsilon$  est une constante positive.

**Théorème 6.1** *Étant donné le système robotique avec contraintes holonomes décrit par l'équation dynamique (6.1) et la loi de commande (6.6), telle que  $\mathbf{r}$  est donnée par (6.8). La loi de commande (6.6) est continue et stabilise uniformément le système en chaîne fermée. Cette stabilité résulte de la borne uniforme et ultime des erreurs.*

**Preuve:** Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{s} + (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T \Gamma^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2) \quad (6.10)$$

La dérivée de  $V$  par rapport au temps le long de trajectoires de (6.7) est

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -(\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2)^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2) - (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T \Gamma^T \mathbf{K}_1 \Gamma (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2) \\ & + \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a)(\tilde{\alpha} + \mathbf{r})) + \mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \mathbf{K}_\lambda \int \tilde{\lambda} dt) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Selon la propriété 2.9, on

$$\mathbf{J}^{*T}(\mathbf{x}_2)(\tilde{\lambda} + \int \tilde{\lambda} dt) = 0$$

donc

$$\begin{aligned}\dot{V} = & -(\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2)^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2) - (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T \Gamma^T \mathbf{K}_1 \Gamma (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{s}^T (\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a)(\tilde{\alpha} + \mathbf{p})) \\ = & -\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a)(\tilde{\alpha} + \mathbf{r})\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{x}^T = [(\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T, (\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2)^T]^T$  et  $\mathbf{H} = \text{diag}\{\Gamma^T \mathbf{K}_1 \Gamma, \mathbf{K}_1\}$ .

Dans ce qui suit, pour alléger la présentation, on notera  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, a)$  par  $\mathbf{Y}$

Si  $(s, t) \in \mathbb{N}$ , donc

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T (\tilde{\alpha} + \mathbf{r}) &= (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( \tilde{\alpha} - \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right) \\ &\leq \|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| (\|\tilde{\alpha}\| - \rho) < 0\end{aligned}$$

Si  $(s, t) \notin \mathbb{N}$ , selon l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous aurons

$$\begin{aligned}(\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T (\tilde{\alpha} + \mathbf{r}) &\leq (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( \mathbf{r} + \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right) \\ &= (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( -\frac{\rho}{\varepsilon} \mathbf{Y}^T \mathbf{s} - \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right)\end{aligned}$$

Ce dernier terme atteint une valeur maximale de  $\varepsilon \rho / 2$  quand  $\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| = \varepsilon / 2$ . On aura ainsi

$$\dot{V} \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \varepsilon / 2 \quad (6.12)$$

$$\dot{V} \leq -\eta_3(\|\mathbf{x}\|) + \varepsilon \rho / 2 \quad (6.13)$$

avec

$$\eta_3(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_{\min}(\mathbf{H})\|\mathbf{x}\|^2. \quad (6.14)$$

Pour compléter la preuve, il suffit de noter que selon la Propriété 6.2, il existe deux fonctions de classe  $\mathbf{K}$   $\eta_1(\cdot)$  et  $\eta_2(\cdot)$  telle que (Craig, 1988).

$$\eta_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \eta_2(\|\mathbf{x}\|). \quad (6.15)$$

En employant le résultat et la terminologie de Corless et Leitmann (1981), la stabilité du système est uniforme pour

$$\|\mathbf{x}\| > \left( \frac{\varepsilon \rho}{2 \lambda_{\min}(\mathbf{H})} \right)^{1/2} \quad (6.16)$$

qui représente la borne ultime du vecteur d'état  $\mathbf{x}$ . Donc  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  et  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2$  sont uniformément bornées. Le résultat de convergence du vecteur des forces des contraintes est similaire à celui obtenu par la proposition 4.2, c'est à dire, si les trajectoires désirées appartiennent à la variété définie par (4.25), donc  $\tilde{\lambda}_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ . Sinon,

$$\|\tilde{\lambda}\| = \varepsilon(\mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \nu, \alpha) \|\mathbf{I} + \mathbf{K}_\lambda\|^{-1} \quad (6.17)$$

plus grand est  $\|\mathbf{K}_\lambda\|$ , plus faible est  $\|\tilde{\lambda}\|$ .

□

**Remarque:** Une fonction  $f(\cdot)$  est dite de classe  $\mathbf{K}$  si elle est strictement croissante et que  $f(0)=0$ .

### 6.2.2 Schéma modifié de la commande

La loi de commande (6.8) garantit au système une stabilité uniforme, et des bornes ultimes des variables d'état du système. Afin de garantir une stabilisation asymptotique du système incertain, nous allons employer la même technique qu'au chapitre 4, qui est basée sur une modification de la sphère de commutation. Cette dernière est définie par  $\|Y^T s\| = \varepsilon$  pour la loi (6.8). Soit une classe de fonctions continues et uniformes  $\varphi(t)$ , satisfaisant  $0 < \varphi(t) \leq 1$  et la fonction intégrale indéfinie  $\omega(t) =: \int \varphi(t) dt \leq 0$ .

Définissons, maintenant la sphère de commutation par  $\|Y^T s\| = \varepsilon \varphi(t)$ , il s'en suit du fait que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ , que la sphère de commutation se rétrécit dans l'espace d'état lorsque le temps augmente, et une stabilité asymptotique du système sera ainsi garantie.

Considérons maintenant la loi de commande

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} -\rho \frac{Y^T s}{\|Y^T s\|} & \text{si } s \notin \mathcal{N} \\ -\frac{\rho}{\varepsilon \varphi(t)} Y^T s & \text{si } s \in \mathcal{N} \end{cases} \quad (6.18)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{N} =: \{s / \|Y^T s\| \leq \varepsilon \varphi(t)\} \quad (6.19)$$

$\varepsilon$  est une constante positive.

**Théorème 6.2** *Étant donné le système robotique avec contraintes holonomes décrits par l'équation dynamique (6.1) et la loi de commande (6.6), où  $\mathbf{r}(t)$  est donnée par (6.18).*

La loi de commande (6.6) est continue et stabilise asymptotiquement le système en chaîne fermée.

**Preuve** Considérons toujours la fonction de Lyapunov candidate

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^*(\mathbf{x}_2) \mathbf{s} + (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T \Gamma^T \mathbf{K}_1 (\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2) \quad (6.19)$$

La dérivée de  $V$  par rapport au temps le long de trajectoires de (6.7) est

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \mathbf{Y} (\tilde{\alpha} + \mathbf{r}) \quad (6.20)$$

avec  $\mathbf{x}^T = [(\mathbf{E}_2^T \tilde{\mathbf{x}}_2)^T, (\mathbf{E}_2^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2)^T]^T$  et  $\mathbf{H} = \text{diag}\{\Gamma^T \mathbf{K}_1 \Gamma, \mathbf{K}_1\}$ .

Si  $(\mathbf{s}, t) \in \mathbb{N}$ , donc

$$(\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T (\tilde{\alpha} + \mathbf{r}) = (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( \tilde{\alpha} - \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right) \quad (6.21)$$

$$\leq \|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| (\|\tilde{\alpha}\| - \rho) < 0 \quad (6.22)$$

Si  $(\mathbf{s}, t) \notin \mathbb{N}$ , selon l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous aurons

$$(\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T (\tilde{\alpha} + \mathbf{r}) \leq (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( \mathbf{p} + \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right) \quad (6.23)$$

$$= (\mathbf{Y}^T \mathbf{s})^T \left( -\frac{\rho}{\varepsilon \varphi(t)} \mathbf{Y}^T \mathbf{s} - \rho \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} \right) \quad (6.24)$$

Ce dernier terme atteint une valeur maximale de  $\varepsilon \rho \varphi(t) / 2$  quand  $\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| = \varepsilon \varphi(t) / 2$ . On aura ainsi

$$\dot{V} \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \varepsilon \rho \varphi / 2 \quad (6.25)$$

$$\dot{V} \leq -\eta_3 (\|\mathbf{x}\|) + \varepsilon \rho \varphi / 2 \quad (6.26)$$

avec

$$\eta_3 (\|\mathbf{x}\|) = \lambda_{\min}(\mathbf{H}) \|\mathbf{x}\|^2.$$

Selon (6.25) et d'après le lemme 4.1 la stabilité du système est asymptotique et l'on a ainsi  $\bar{\mathbf{x}}_2 \rightarrow 0$  et  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \rightarrow 0$ .

Le résultat de convergence du vecteur des forces des contraintes est similaire à celui obtenu en 6.1.1.

□

### 6.2.3 Extension de la loi de commande

De point de vue pratique, le fait de borner la norme de toutes les incertitudes des paramètres par un simple scalaire peut amener à une conception conservatrice de la loi de commande, et engendrer des gains excessifs. Pour cela, il est intéressant d'étendre la loi de commande (6.18) à une nouvelle loi dans laquelle différents poids ou gains seront assignés à chaque élément du vecteur d'entrée. Supposons que nous avons une mesure des incertitudes pour chaque paramètres séparément selon

$$|\alpha_i| \leq \rho_i \quad i = 1, \dots, r$$

Soit  $\zeta_i$  la  $i$ ème composante du vecteur  $\mathbf{Y}^T \mathbf{s}$ , soit  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  des constantes positives, et définissons la  $i$ ème composante  $r_i$  de la loi de commande  $\mathbf{r}$  telle que

$$r_i(t) = \begin{cases} -\frac{\rho_i \zeta_i}{|\zeta_i|} & \text{si } |\zeta_i| > \varepsilon_i \varphi(t) \\ -\frac{\rho_i \zeta_i}{\varepsilon_i \varphi(t)} & \text{si } |\zeta_i| \leq \varepsilon_i \varphi(t) \end{cases} \quad (6.27)$$

On peut démontrer (Spong 1994) que la fonction dérivée de Lyapunov est partout définie négative.

### 6.3 Version adaptative de la commande

La connaissance des bornes ultimes des incertitudes sur les paramètres est parfois difficile à obtenir, il est ainsi préférable d'ajouter un processus d'adaptation pour estimer les paramètres du système. Dans cette section nous allons modifier la loi de commande (6.18), en ajoutant une adaptation des paramètres inconnus du système. De ce fait, la connaissance des bornes supérieures ne sera plus requise.

#### 6.3.1 Lois de commande et d'adaptation

Considérons maintenant la loi de commande robuste

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} -\hat{\rho} \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{s}}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\|} & \text{si } \mathbf{s} \notin \mathbb{N} \\ -\frac{\hat{\rho}}{\varepsilon \varphi(t)} \mathbf{Y}^T \mathbf{s} & \text{si } \mathbf{s} \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (6.28)$$

où  $\hat{\rho}$  est la valeur estimée de  $\rho$ .

Considérons la loi d'adaptation

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{cases} \theta \|Y^T s\| & \text{si } s \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } s \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (6.29)$$

où  $\theta$  est une constante positive qui représente le gain d'adaptation.

**Théorème 6.3** *Étant donné le système robotique avec contraintes holonomes décrit par l'équation dynamique (6.1) et la loi de commande (6.8), où  $r(t)$  est donnée par (6.8) et la loi d'adaptation (6.29). Le système en chaîne fermée est asymptotiquement stable et l'on a ainsi  $x_2 \rightarrow x_{2d}$ ,  $\dot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_{2d}$  et  $\lambda \rightarrow \lambda_d$  quand le temps  $t \rightarrow \infty$ .*

**Preuve** Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V = \frac{1}{2} s^T M^* s + (E_2^T x_2)^T \Gamma K_1 (E_2^T x_2) + \frac{1}{2\theta} \tilde{\rho}^2(t) \quad (6.30)$$

avec  $\tilde{\rho} = \rho - \hat{\rho}$ .

La dérivée de la fonction (6.30) de Lyapunov le long des trajectoires des solutions de (6.7) est

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x^T H x + s^T Y(\tilde{\alpha} + r(t)) - \frac{1}{\theta} \rho \dot{\hat{\rho}} + \frac{1}{\theta} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \\ &\leq -x^T H x + s^T Y r(t) + \|Y s^T\| \left| \rho - \frac{1}{\theta} \rho \dot{\hat{\rho}} + \frac{1}{\theta} \hat{\rho} \dot{\hat{\rho}} \right| \end{aligned} \quad (6.31)$$

Quand  $t \notin \mathbb{N}$ ,

$$\dot{V} \leq -x^T H x < 0, \quad (6.32)$$

et quand  $t \in \mathbb{N}$

$$\dot{V} \leq -x^T H x + \varepsilon \varphi(t) \|\tilde{\rho}(t)\|. \quad (6.33)$$



Puisque  $\dot{V} < 0$  pour  $t \notin \mathbb{N}$ ,  $V(\cdot)$  est continûment décroissante et  $\|\tilde{\rho}(t)\|$  ne peut pas être croissante lorsque  $t \notin \mathbb{N}$ . De plus quand  $t \in \mathbb{N}$ , puisque  $\dot{\hat{\rho}}(t) = 0$ ,  $\|\tilde{\rho}(t)\|$  demeure constante. Ainsi,  $\varepsilon\varphi(t)\|\hat{\rho}(t)\|$  ne peut croître et tend vers zéro. Supposons que  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$  et  $\|\rho(t_0)\|$  sont bornées, les conditions précédentes impliquent que, pour tout  $t \in [0, \infty)$ ,  $\|\tilde{\rho}(t)\|$  et  $\|\mathbf{x}(t)\|$  sont bornées. De plus, en appliquant le Théorème de Lasalle (Khalil, 1991), on aura  $\tilde{\mathbf{x}}_2 \rightarrow 0$  et  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \rightarrow 0$ . La conclusion sur la convergence du vecteur des forces des contraintes reste la même que celle de la section 6.1.1.

□

**Remarque:** Dans l'implantation pratique de cette commande,  $\hat{\rho}(t)$  peut dériver à cause des dynamiques non-modélisées et des perturbations. Pour éviter ce problème, on peut utiliser la modification suivante (Peterson et Narendra 1982), telle que

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{cases} \theta \|\mathbf{Y}^T \mathbf{s}\| - \sigma \hat{\rho}(t) & \text{si } s \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } s \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (6.34)$$

### 6.3.2 Extension des lois de commande et d'adaptation

Supposons que nous avons une mesure des incertitudes pour chaque paramètres séparément selon

$$|\alpha_i| \leq \rho_i \quad i = 1, \dots, r \quad (6.35)$$

Soit  $\zeta_i$  la  $i$ ème composante du vecteur  $\mathbf{Y}^T \mathbf{s}$ , soit  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  des constantes positives, on peut définir la loi d'adaptation par

$$\dot{\hat{\rho}}_i(t) = \begin{cases} \theta |\zeta_i| & \text{si } |\zeta_i| > \varepsilon\varphi(t) \\ 0 & \text{si } |\zeta_i| \leq \varepsilon\varphi(t) \end{cases} \quad (6.36)$$

et la loi de commande par

$$p_i(t) = \begin{cases} -\frac{\rho_i \zeta_i}{|\zeta_i|} & \text{si } |\zeta_i| > \varepsilon_i \varphi(t) \\ -\frac{\rho_i \zeta_i}{\varepsilon_i \varphi(t)} & \text{si } |\zeta_i| \leq \varepsilon_i \varphi(t) \end{cases} \quad (6.37)$$

On peut démontrer que le résultat relatif à la stabilité asymptotique du système demeure valide (Spong 1994).

#### 6.4 Application

Considérons la même application que celle du chapitre 3. Nous supposons maintenant que les paramètres du système sont incertains. En effet, on suppose que les paramètres estimés du système sont:

$$\hat{a} = 1, \hat{b} = 0.5 \text{ et } \hat{c} = 0.5.$$

Nous supposons aussi que le système est soumis à un vecteur de couples de perturbations externes constantes défini par

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} Nm.$$

On choisira

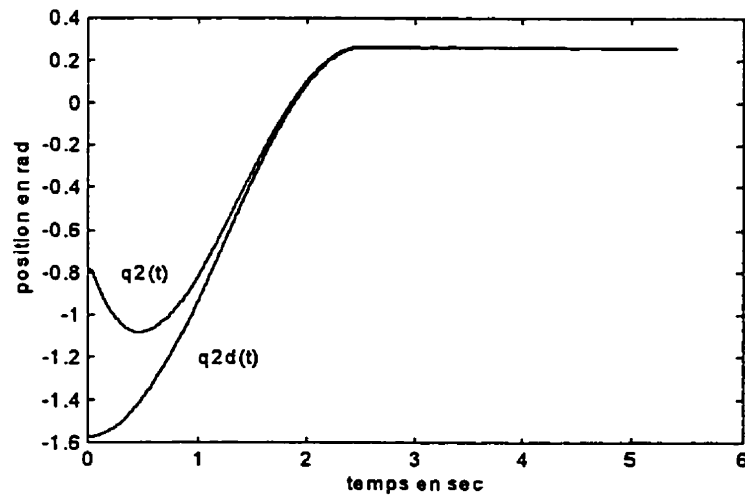
$$x_{2d}(t) = q_{2d}(t) = (-1.57 + 0.9(1 - \cos 1.26t)) \text{ rad} \quad \text{quand } t < 2.5 \text{ sec}$$

$$x_{2d}(t) = 0.26 \text{ rad} \quad \text{quand } t \geq 2.5 \text{ sec}$$

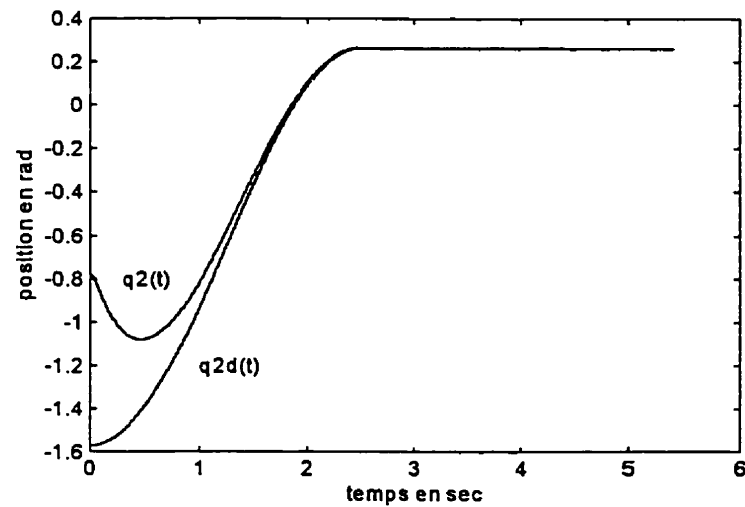
$$\lambda_d = 10 N$$

Les figures 6.1 (a) et 6.1 (b) représentent la trajectoire relative à la poursuite de la trajectoire respectivement avec les éléments de commande robustes (6.18) et (6.28). Il

est clair ici que par l'emploi de l'une ou l'autre loi de commande, la poursuite de la trajectoire est achevée.



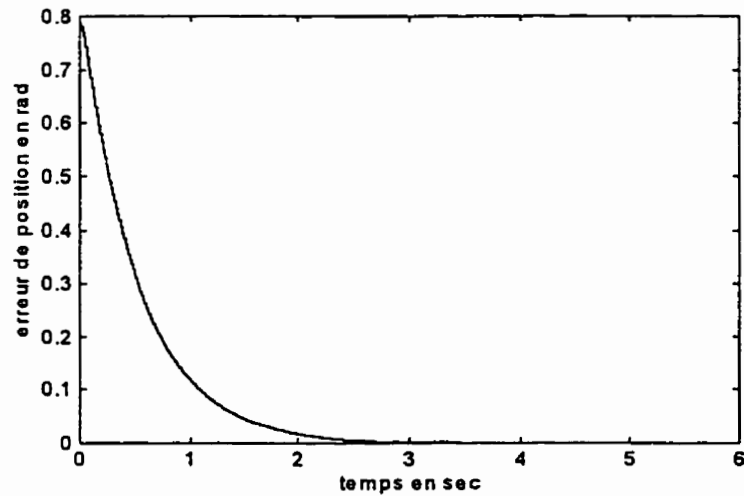
(a)



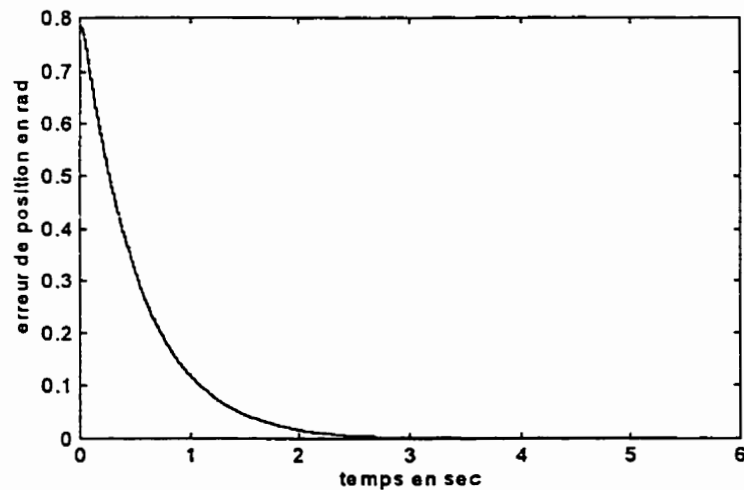
(b)

Figure 6.1 Poursuite de la trajectoire de déplacement

Les figures 6.2 (a) et 6.2 (b) représentent respectivement les trajectoires relatives aux erreurs de poursuite respectivement avec les éléments de commande robustes (6.18) et (6.28). Les dynamiques de l'erreur sont semblables.



(a)

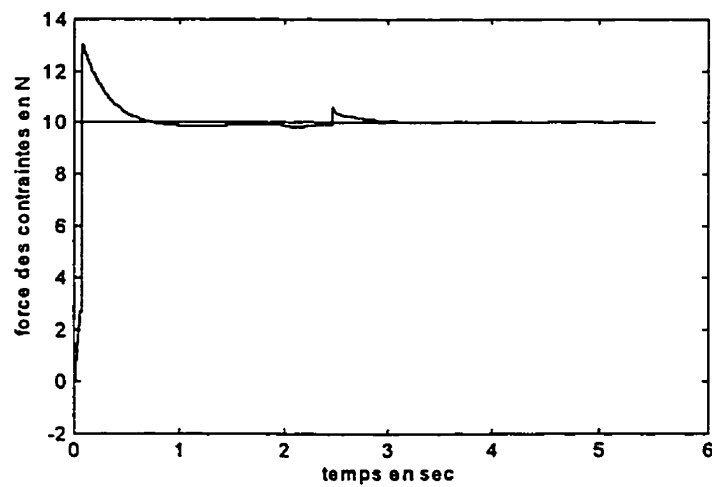


(b)

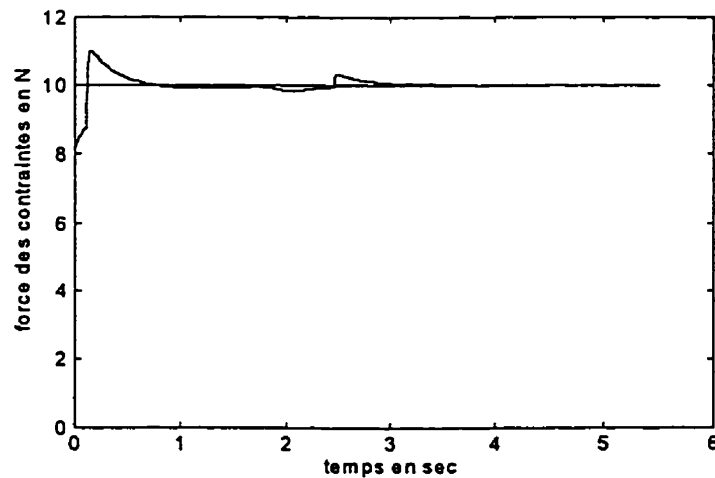
Figure 6.2 Erreur relative à la trajectoire de déplacement

Les figures 6.3 (a) et 6.3 (b) représentent les erreurs de la force des contraintes appliquée sur la surface des contraintes et l'erreur respectivement avec les éléments de

commande robustes (6.18) et (6.28). Ici, il est clair que le régime transitoire de la variation de la force est meilleur avec la commande (6.28). Ceci est dû à l'effet de l'adaptation des bornes des paramètres du système. Par comparaison de ces réponses à celles obtenues au chapitre 5 par la loi de commande à structure variable, il est clair que le régime transitoire ici est bien plus souple. D'un point de vue pratique, ce résultat est assez important du fait qu'un dépassement élevé en régime transitoire des forces des contraintes peut causer des dommages au système.



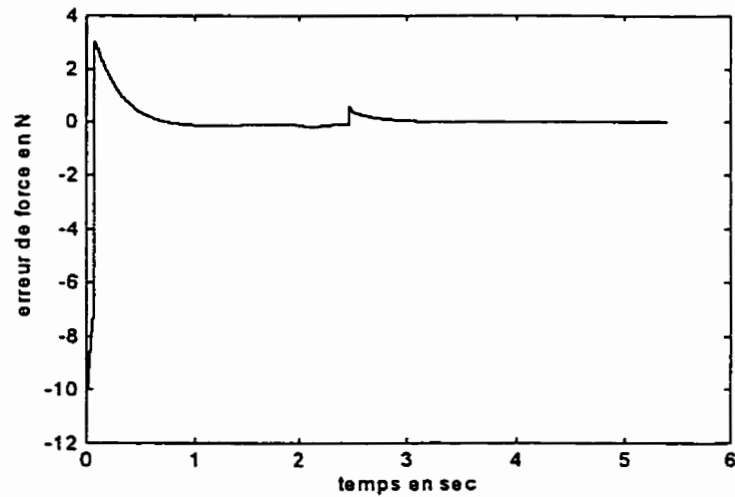
(a)



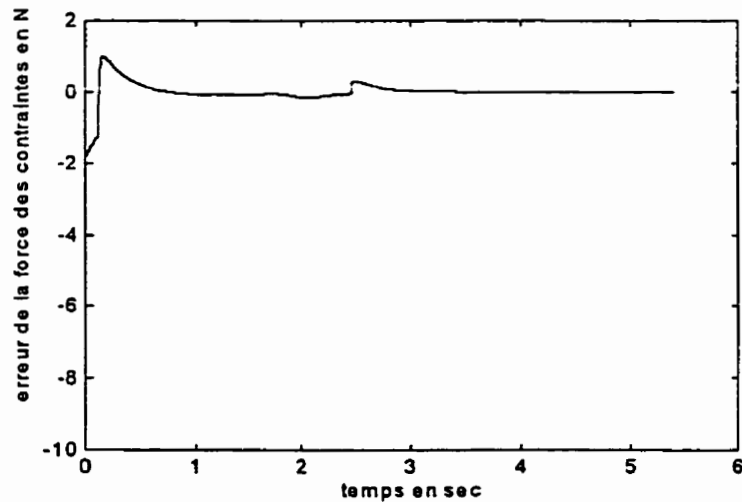
(b)

Figure 6.3 Force appliquée sur la surface des contraintes

Les figures 6.4 (a) et 6.4 (b) représentent les erreurs relatives aux forces des contraintes respectivement avec les éléments de commande robustes (6.18) et (6.28). Ici, on remarque une autre fois que la convergence des forces des contraintes est achevée.



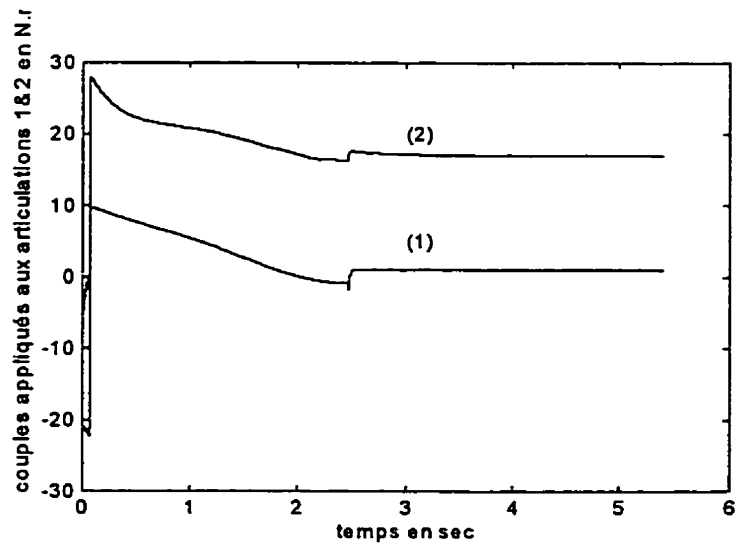
(a)



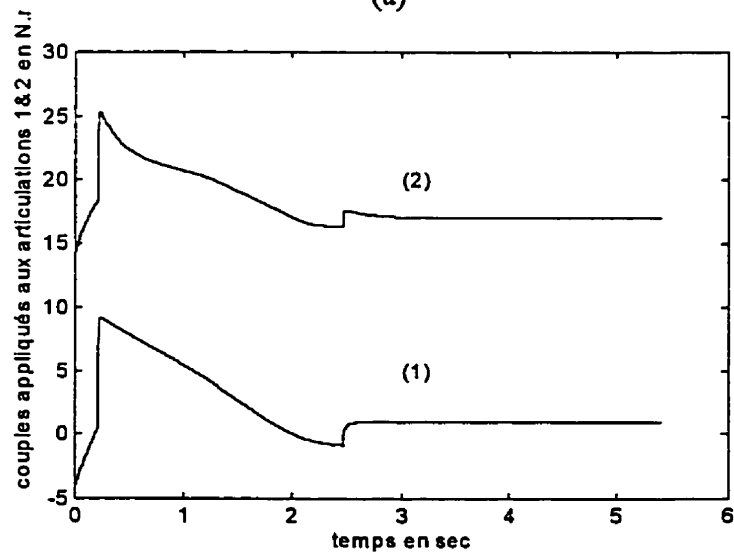
(b)

Figure 6.4 Erreur de la force des contraintes

Les figures 6.5 (a) et 6.5 (b) représentent l'effort de la commande appliquée à chacune des articulations respectivement avec les éléments de commande robustes (6.28) et (6.18). les conclusions relatives au régime transitoire restent similaire à celle concernant la force des contraintes.



(a)



(b)

Figure 6.5 Couples appliqués aux articulations 1 et 2

La figure ci-dessous représente l'erreur de la poursuite de trajectoire, en employant la loi de commande (6.8). Il est clair que l'erreur en régime permanent du système est non nulle. Ceci, vérifie que la loi de commande (6.8) ne garantit pas la convergence asymptotique du système. La stabilité dans ce cas est uniforme, et l'erreur est par conséquent bornée.

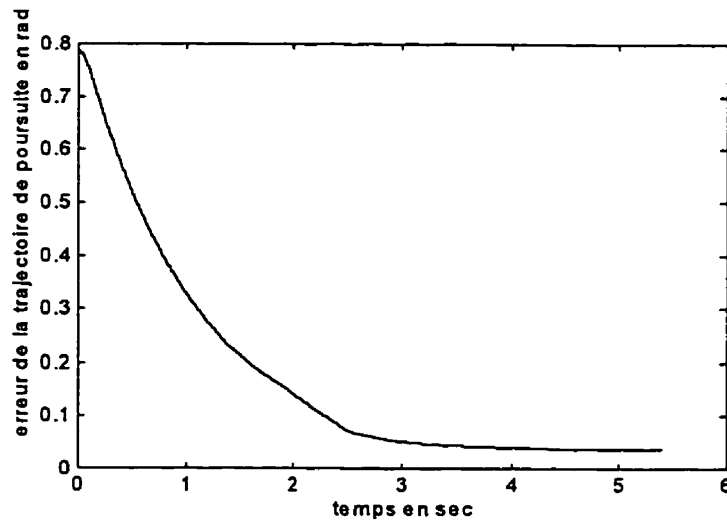


Figure 6.6 Erreur relative à la trajectoire de poursuite avec l'élément de robustesse (6.8)

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous avons développé une loi de commande robuste appliquée aux manipulateurs robotiques avec contraintes holonomes. Nous avons substitué la fonction *signum* utilisée dans la commande à structure variable par une fonction de saturation continue, garantissant la stabilité ultime et bornée du système. Dans un deuxième temps, nous avons modifié la structure de la commande robuste, ainsi la stabilité asymptotique du système a pu être assurée. Enfin, nous avons ajouté une boucle d'adaptation pour estimer les bornes des paramètres incertains de la dynamique du



système. Ceci permet d'éliminer la condition de connaissance des bornes ultimes supérieures des paramètres inconnus. Un deuxième avantage des approches de commande élaborées dans ce chapitre est l'élimination des effets des couples élevés au démarrage, et donc l'élimination des valeurs élevées des forces appliquées sur la surface des contraintes.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

Les systèmes robotiques avec contraintes holonomes se présentent sous la forme des équations algébro-différentielles. Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange caractérise les forces de contraintes du système. Une étude de la stabilisation et le design de la commande des systèmes robotiques avec contraintes holonomes ont été abordés dans cette thèse. Cette étude utilise principalement une transformation non-linéaire des coordonnées naturelles du système. Cette transformation a permis de faciliter la présentation de la dynamique du système et ainsi de pouvoir utiliser des techniques classiques et modernes relatives à la commande des systèmes. Un design de certaines lois de commande robustes et adaptatives a été aussi un des principaux éléments de cette thèse. L'objectif de ce design était essentiellement de garantir la convergence asymptotique du système en présence des incertitudes sur le modèle et des perturbations externes. En particulier, quelques conclusions peuvent être tirées:

(1) Des équations algébro-différentielles, sous la forme des équations de Lagrange, peuvent être utilisées pour modéliser les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes. Dans cette thèse, ces équations sont utilisées lorsque le contact est rigide. Le mouvement contraint de ces systèmes, peut être aussi modélisé par un ensemble d'équations différentielles d'ordre réduit. Dans un tel modèle, les forces des contraintes sont fonctions des positions, des vitesses et des accélérations généralisées du système. Ceci a été rendu possible grâce à une transformation non-linéaire des coordonnées généralisées du système en de

nouvelles coordonnées dans lesquelles les équations des contraintes se trouvent implicitement intégrées. Une étude de la stabilité locale du modèle a pu être ainsi généralisée.

(2) Les systèmes mécaniques avec contraintes holonomes sont complètement linéarisables au sens entrées-sorties. La régulation simultanée force/position du système peut être accomplie par cette technique. Dans le cas d'un système nominal, le retour d'état nécessaire concerne uniquement les variables des positions et des vitesses généralisées du système. La mesure des forces des contraintes n'est pas nécessaire dans ce cas. La stabilité globale et exponentielle du système est garantie par un choix propice des matrices des gains.

(3) Lorsque le système présente des incertitudes de modèle et considérant l'effet des perturbations externes, une boucle de stabilisation robuste est adjointe à la commande linéarisante et découplante. Elle garantit la stabilisation robuste et asymptotique du système. Cette approche nécessite la connaissance d'une fonction qui majore les fonctions des perturbations. Une action Proportionnel-Intégral est ajoutée à la régulation du vecteur des forces de contraintes.

(4) Les lois de commande à structure variable et à structure variable adaptative ont été aussi utilisées pour la stabilisation robuste de ces systèmes. Une discontinuité de la commande lors de l'utilisation de la fonction de signe engendre une discontinuité des forces des contraintes.

(5) Une modification des lois de commande à structure variable a été apportée pour pallier au problème de la discontinuité de la solution. Cette modification utilise, en fait, une fonction de retour d'état continue du système.

La loi de commande robuste présentée au chapitre 4 assure la convergence asymptotique du système incertain. L'inconvénient de cette loi de commande, est qu'elle nécessite la connaissance des fonctions qui bornent les incertitudes du modèle du système, qui, en pratique, est difficile à obtenir. De plus, cette commande, de type saturation modifiée, est très sensible à l'augmentation des gains du système ainsi qu'à la période de discrétisation, ce qui rend difficile son implantation pratique. Les lois de commande présentées au chapitre 5, et qui sont basées sur l'approche de commande à structure variable, assurent la stabilité asymptotique du système. Cette commande, assure aussi la robustesse du système face aux incertitudes de modèle et aux perturbations statiques. L'emploi de la fonction  $\text{signum}$  dans cette loi de commande génère une discontinuité de la commande et par conséquent du vecteur des multiplicateur de Lagrange. De ce fait, la convergence des forces des contraintes n'est plus assurée. Cette loi de commande est caractérisée, en outre, par un fort couple de démarrage, ceci est dû aux forts gains qui caractérisent les systèmes à structure variable. L'adaptation des bornes des paramètres incertains peut réduire l'intensité de ces couples de démarrage. Les lois de commandes présentées au chapitre 6, sont, en fait, une amélioration de la commande à structure variable, dans lesquelles la fonction  $\text{signum}$  a été remplacée par une fonction continue. Cette modification, assure la stabilité asymptotique du système ainsi que la continuité de la solution relative aux forces des contraintes. Les couples de démarrage, relatifs à cette approche sont nettement plus faibles. L'adaptation des bornes des incertitudes est d'un

intérêt pratique, à cause que la connaissance préalable de ces bornes n'est pas toujours facile à obtenir.

Dans cette thèse, l'analyse des systèmes mécaniques avec contraintes holonomes et le design des lois de commande robustes ont été étudiés. Cependant, il reste que plusieurs extensions de recherche peuvent être relevées. Quelques recherches possibles peuvent être suggérées:

- (1) La considération des incertitudes qui concernent l'irrégularité de la surface des contraintes est d'une grande importance étant donné que d'un point de vue pratique, une surface des contraintes ne peut jamais être régulière.
- (2) La considération des forces de frottement, dues au contact entre l'effecteur et la surface des contraintes dans la synthèse des lois de commande.
- (3) Une expérimentation des résultats présentés dans cette thèse serait souhaitable.
- (4) L'étude de la commande de certaines classes de systèmes non-holonomes
- (5) La généralisation des lois de commande pour qu'elles soient valides lors du contact et en l'absence du contact ainsi que l'étude de la commutation entre les deux modes de fonctionnement.

**BIBLIOGRAPHIE**

ARNOLD, V.I., (1989). Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer Verlag.

BIN, Y., CHAN, S.P. and WANG, D. (1992). Robust motion and force control of robot manipulators in the presence of environmental constraint uncertainties, Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control, 1875-1880.

BIN, Y. and MASAYOSHI, T. (1995). Adaptive control of robot manipulators in constrained motion- Controller design. Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 117, 320-328.

CARELLI, R., and KELLEY, R., (1989). Adaptive control of constrained robots modeled by singular system. Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, pp2635-2640.

COBB, D. (1981). Feedback and pole placement in descriptor variable Systems. International Journal of Control, 33, 6, 1135-1146.

COLE, A. A. (1989). Control of robot manipulators with constrained motion. Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, pp. 1657-1658.

CORLESS, M and LEITMANN, G. (1981). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 26, 1139-1144.

CORLESS, M and LEITMANN, G. (1983). Adaptive control of systems containing uncertain functions and unknown functions with uncertain bounds. Journal of Optimization Theory and Applications, 33, 1, 155-168

CRAIG, J.J. (1989). Introduction to robotics. Addison Wesley, second edition.

CRAIG, J.J. (1988). Adaptive control of mechanical manipulators. Addison Wesley.

DRAGANOIU, G., (1982). Computer method for setting dynamical model of an industrial robots with closed kinematic chains. International Sym. on Industrial Robots.

EMAYLANOV, S.V., (1957). A technique to develop complex control equations by using only the error signal of control variable and its first derivative. Avtomatika i Telemekhanika, 18, 10, 873-885.

FLIPPOV, A.F., (1964). Differential equations with discontinuous right-hand sides. American Mathematics Society Transactions, 62, 199.

GOLDSTEIN, H., (1950). Classical Mechanics. Addison-Wesley Press.

GEAR, C.W. and PETZOLD, L.R., (1984). ODE methods for the solution of differential /algebraic systems. SIAM Journal of Numerical Analysis, 21, 4, 716-728.

GREENWOOD, D.T., (1977). Classical Dynamics. Prentice Hall.

GUTMAN, S., (1979). Uncertain dynamical systems- A Lyapunov min-max approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 24, 437-443.

HACHED, M., MADANI-ESFAHANI, S. M. AND ZAK, S. H., (1988). Stabilization of uncertain system subject to hard bounds on control with application to a robot manipulator. IEEE Journal of Robotics and Automation, 4, 310-323.

HEMAMI, H. and WYMAN, B.F., (1979). Modeling and control of constrained Dynamic Systems with application to biped locomotion in the frontal plane. IEEE Transaction on Automatic Control, AC-24, 4, 526-535.

HUANG, H. P., and LIN, M. (1990)., Variable structure control of constrained dynamic systems. Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation, pp, 1362-1366.

HUANG, H. P., and TZENG, W. L., (1988). An observer design for constrained dynamic systems. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Austin, 1545-2550.



HUANG, H. P., and TZENG, W. L., (1989). Robotic force control by using estimated contact force. Proceedings of the 18th Conference on Decision and Control, Tampa, 2158-2163.

ISIDORI, A., (1989). Nonlinear Control Systems. Springer Verlag.

JEAN, J.H., and FU, L.C., (1993). Adaptive hybrid control strategies of constrained robots, IEEE Transactions on Automatic Control, 38, 4, 598-603, (1993).

KANKAANTRANTA, R., and KOIVO, H. N., (1988), Dynamics and simulation of compliant manipulators. IEEE Journal of Robotics and Automation, 4, 163-173.

KHALIL, H. (1991). Nonlinear Systems, Mac Millan.

KHATIB, O., (1987). A unified Approach for motion and force control of robot manipulators: the operational space formulation. IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3, 43-53.

KOIVO, A., and BEKEY, G.A., (1988). "Report of workshop on coordinated multiple robot manipulators: Planning, control and applications. IEEE, journal of Robotics and Automation, 4, 1, 91-93.

LIN, S. K., (1989). Control of a robot constrained by environments. Proceedings of the 3th Symposium on Automatic Control, Taipei, Taiwan, pp. 153-159.

LUENBURGER, D. G., (1977). Dynamics equations in descriptor form. IEEE transactions on Automatic Control, 22, 3, 312-321.

MC-CLAMROCH, N.H., (1989). A singular perturbation approach to modelling and control of manipulators constrained by a stiff environment. Proceedings of the 18th Conference on Decision and Control, Tampa, 2407-2411.

MC-CLAMROCH, N.H., and HUANG, H.P. (1985). Dynamics of a closed chain manipulator, Proc. on American Control Conference, 50-54.

MC-CLAMROCH, N.H. and WANG, D. (1988). Feedback stabilisation and tracking of constrained robots, IEEE, Transactions on Automatic Control, 33, 410-426.

MIDDLETON, R.H. (1988). Hybrid adaptive control for robot manipulators, Proc. of the 27 th Conference on Decision and Control, 1592-1603.

MILLS, J.K., (1989) Control of robotic manipulators with flexible joints during constrained motion task execution. Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, 1676-1681.

MILLS, J.K. (1991). Hybrid control: a constrained motion perspective, Journal of Robotics Systems, 8, 135-158.

MILLS, J.K., and GOLDENBERG, A.A., (1989). Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. IEEE Journal of Robotics and Automation, 5, 1, 30-46.

MNIF, F., SAAD, M., and BOUKAS, E-K., (1995). A Robust adaptive Approach for force/motion control of manipulators under holonomic constraints. Proc. of the CCECE, 18.5-18.9.

MNIF, F., SAAD, M., and BOUKAS, E-K., (1996), An adaptive sliding mode control for constrained manipulators. IEEE Can. Journal of Electrical and Computer Engineering, 21, 2, 73-80.

MNIF, F., BOUKAS, E-K., and SAAD, M., (1996). Robust Control of constrained manipulators. Soumis à Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control.

MNIF, F., SAAD, M., and BOUKAS, E-K., (1995). Intéraction des robots manipulateurs avec leurs environnement de travail: Application à l'ébavurage. Compte rendu du Congrès International de Génie Industriel, 357-367.

MNIF, F., SAAD, M., and BOUKAS, E-K., (1996). Robust feedback linearization control for constrained manipulators. Soumis à IFAC, SYROCO'97.

MNIF, F., BOUKAS, E-K., and SAAD, M., (1996). A modified continuous VSS control for constrained manipulators. Soumis à IFAC, SYROCO'97.

ORIN, D.E. and OH, S.Y., (1981). Control of force distribution in robotic mechanisms containing closed kinematics chains. ASME. Journal of Dynamic Systems, Meas. and Control, 102, 134-141.

PANTELEY, E.V. and STOTSKY, A.A. (1993). Adaptive trajectory/force control scheme for constrained robot manipulators, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 7, 489-496.

PETERSON, B. B. and NARENDRA, K. S., (1982). Bounded error adaptive control. IEEE Transactions on Automatic Control, 22, 1161-1168.

PETZOLD, L.R., (1982). Differential/Algebraic equations are not ODES's, SIAM Journal of Sci. Stat. Computation, 3, 3, 367-384.

QIJU, Z., and CHUNYI, S. (1993). An adaptive sliding mode control scheme for robot manipulators, International Journal of Control, 2, 57, 261-276.

QU, Z. (1994). "Asymptotic stability of controlling uncertain dynamical systems. International Journal of Control, 59, 5, 1345-1355.

RAIBERT, M.H. and CRAIG, J.J. (1981). Hybrid position/force control of manipulators, Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 102, 126-133.

SLOTINE, J.J.E., and LI, W. (1988). Adaptive strategies in constrained manipulation, IEEE Conference on Robotics and Automation, 338-343.

SLOTINE, J.J.E., and LI, W. (1987). On adaptive control of robot manipulators, International Journal of Robotics Research, 6, 48-59.

SLOTINE, J.J.E. and LI, W. (1991). Applied Non-linear Control, Prentice Hall.

SLOTINE, J.J.E. and SASTRY, S.S.. Tracking control of non-linear system using sliding surface, with application to robot manipulators, International Journal of Control, 38, 465-492, (1983).

SPONG, M.W., (1994). On the robust control of robot manipulators. IEEE Transactions on Automatic Control. 37, 1782-1786.

SPONG, M.W. and VIDYASAGAR, M., (1989). Robot dynamics and control. John Wiley & Sons.

STEPANENKO, Y. and SU, C.Y. (1993). Variable structure control of robot manipulators with non-linear sliding manifolds, International Journal of Control, 58, 2, 258-300.

SU, C.Y. LEUNG, T.P. and ZHOU, Q.J. (1992). Force/motion control of constrained robots using sliding mode, IEEE Transactions on Automatic Control, 35, 5, 668-672.

UTKIN, V.I. (1978). Sliding modes and their applications in variable structure systems, édition Mir.

VIDYASAGAR, M., (1993). Nonlinear Systems Analysis. Prentice Hall.

VUCOVICH, G., and MILLS, J.K., (1990). Modelling, stability and control issues of elastic joint manipulators during contact with stiff environment. Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, pp. 2524-2531.

WALCOTT, B. and ZAK, S. H., (1988). Combined observer controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications. IEEE Transactions on Systems and Cybernetics, 18, 1, 88-104.

WITHNEY, D.E. (1976). Force feedback control of manipulator fine motions. Proc. of the 1976 Joint Automatic Control Conference, 687-693.

WITHNEY, D.E. (1987). Historical perspective and state of the art in robot force control". International Journal of Robotics Research. 6, 1, 3-14.

YOSHIKAWA, Y. (1987). Dynamic hybrid position and force control of robot manipulators: description of hand constraints and calculation of joint driving force. IEEE, Journal of Robotics and Automation, RA-3, 386-392.

YOUNG, K. D., (1978). Controller design for a manipulator using theory of variable structure systems. IEEE Transactions on Systems and Cybernetics, 8, 2.

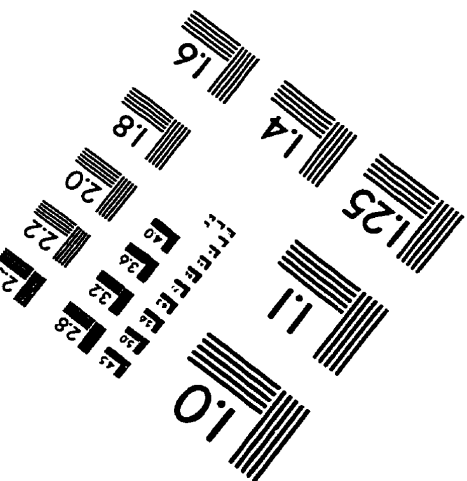
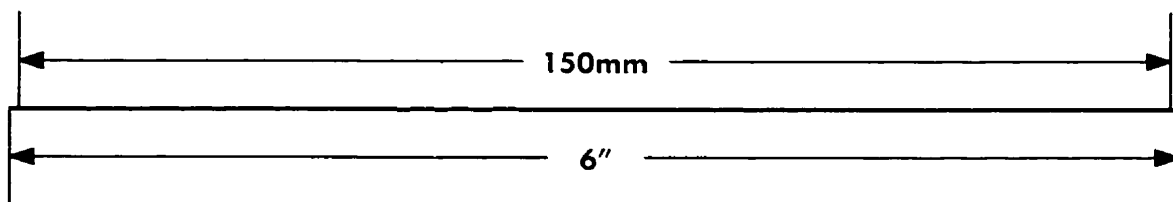
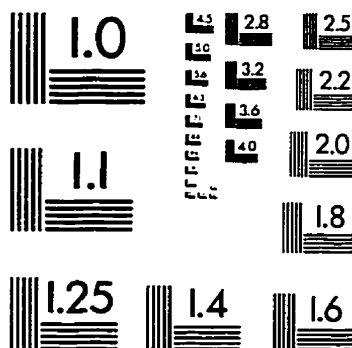
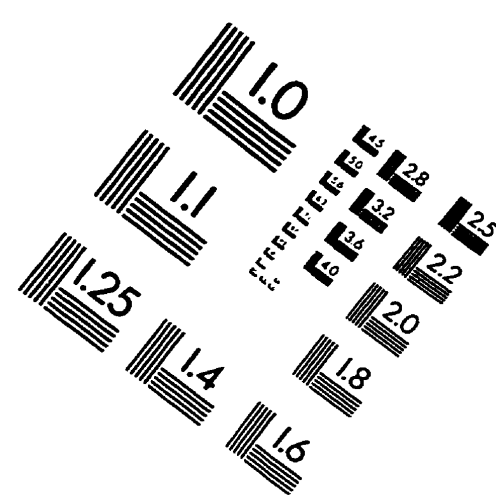
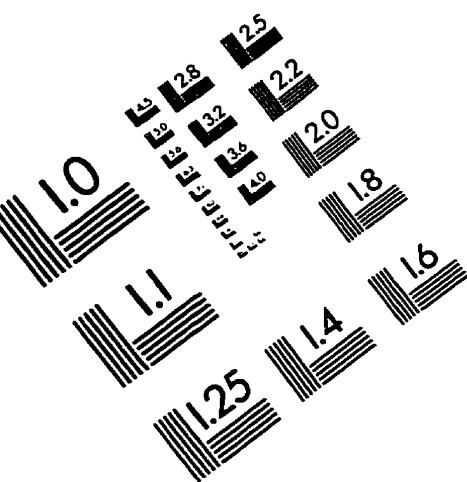
YOUNG, K.D., (1988). The role of sliding mode in contact force control of robotic manipulators. Proc. of the 26th Conference on Decision and Control, 622-626.

YOUNG, K.D. (1988). Applications of sliding mode to constrained robot motion control, Proc. on American Control Conference, 912-916.

YOU, L.S. and CHEN, B.S. (1993). Optimal hybrid position/force tracking of a constrained robot, International Journal of Control, 2, 58, 253-275.

YUN, X. (1988). Dynamic state feedback control of constrained robot manipulators. Proc. 27th Conference on Decision and Control, 622-628.

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

